



Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

---

**Propiedades genéricas y  
Entropía Topológica Para  
Flujos Magnéticos en Superficies**

**Tesis**

que para obtener el grado de

**Doctor en Ciencias**

con orientación en

**Matemáticas Básicas**

PRESENTA:

**José Antônio Gonçalves Miranda**

Directores de Tesis:

Dr. Renato Iturriaga  
Dr. Gonzalo Contreras

06 de diciembre de 2004

Guanajuato, Gto. México



CIMAT  
BIBLIOTECA

C I M A T  
B I B L I O T E C A

019195



**CIMAT**  
CENTRO DE INVESTIGACION  
EN MATEMÁTICAS A.C.

Acta No.: 002  
Libro No.: 002  
Foja No.: 002



  
**CIMAT**  
DIRECCION GENERAL  
DR. JOSÉ CARLOS GÓMEZ LARRAÑAGA  
Director General

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS**

En la ciudad de Guanajuato, Gto., siendo las 13:00 horas del día 6 de diciembre del año 2004, se reunieron los miembros del Jurado Dictaminador integrado por los señores:

**DR. GONZALO ALBERTO CONTRERAS BARANDIARÁN** (CIMAT)  
**DR. XAVIER GÓMEZ-MONT ÁVALOS** (CIMAT)  
**DR. HÉCTOR FIDENCIO SÁNCHEZ MORGADO** (UNAM)  
**DR. ANTONIO HERNÁNDEZ GARDUÑO** (UNAM)  
**DR. RENATO GABRIEL ITURRIAGA ACEVEDO** (CIMAT)

bajo la presidencia del primero y con carácter de secretario el segundo, para proceder a efectuar el examen que para obtener el Grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS  
CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS BÁSICAS**

sustenta:

**JOSÉ ANTÔNIO GONÇALVES MIRANDA**

en cumplimiento con lo establecido en los reglamentos y lineamientos de estudios de posgrado del Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., mediante la presentación del trabajo de tesis:

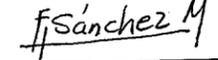
**"PROPIEDADES GENÉRICAS Y ENTROPÍA PARA FLUJOS  
MAGNÉTICOS EN SUPERFICIES".**

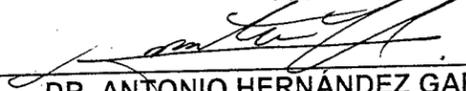
Los miembros del Jurado examinaron alternadamente al (la) sustentante y después de deliberar entre sí resolvieron declararlo (a):

APROBADO

  
DR. GONZALO ALBERTO CONTRERAS BARANDIARÁN  
Presidente

  
DR. XAVIER GÓMEZ-MONT ÁVALOS  
Secretario

  
DR. HÉCTOR FIDENCIO SÁNCHEZ MORGADO  
Vocal

  
DR. ANTONIO HERNÁNDEZ GARDUÑO  
Secretario

  
DR. RENATO GABRIEL ITURRIAGA ACEVEDO  
Vocal

## Agradecimientos

Agradezco a todos que de un modo o de otro han colaborado con la realización de este trabajo. En especial, agradezco a mi asesor Dr. Renato Iturriaga y a mi co-asesor Dr. Gonzalo Contreras, por la dirección de esta tesis y por todo el esfuerzo y tiempo que han dedicado para compartirme sus conocimientos.

Agradezco a mis Sinodales: Dr. Hector Sánchez Morgado, Dr. Antonio Hernández Carduño, Dr. Xavier Gómez-Mont y Dr. Daniel Massart, por la revisión de este trabajo.

Agradezco a la Dra. Claudia Reynoso por su apoyo, amistad y la valiosa revisión de la ortografía de este trabajo.

Agradezco a mis amigos y compañeros en Guanajuato, por sus apoyos, incentivos y por los buenos momentos que hemos compartido en esta importante etapa de mi vida.

Agradezco también a los investigadores y estudiantes del Cimat por proporcionar el incentivo y el ambiente de dedicación al trabajo científico. También agradezco al personal administrativo del Cimat, por su apoyo y soporte técnico.

Un agradecimiento muy especial a mi esposa Talía, por todo su amor, cariño, comprensión y tolerancia durante la realización de este trabajo. Así como a su familia que tanto me han apoyado en el desenvolvimiento de este trabajo.

Agradezco a toda mi familia que apesar de la distancia siempre estuvieron conmigo.

Finalmente agradezco a CAPES/Brasil (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) por el apoyo financiero durante el período de septiembre de 2000 a enero del 2004, y al Cimat por el apoyo recibido para la conclusión y redacción final de este trabajo.

Y por encima de todo agradezco a Dios.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1. Órbitas periódicas no-degeneradas de un flujo y transversalidad . . . . .	9
1.2. Flujos Magnéticos . . . . .	11
1.2.1. Ecuaciones de Jacobi . . . . .	13
1.3. Flujos Magnéticos en una Superficie . . . . .	14
<b>2. Kupka-Smale para flujos magnéticos</b>	<b>19</b>
2.1. Prop. genérica de las geodésicas magnéticas cerradas . . . . .	19
2.1.1. Perturbación local del flujo magnético. . . . .	20
2.1.2. Prueba del Teorema A . . . . .	26
2.2. Transversalidad de las variedades invariantes. . . . .	32
2.2.1. Prueba del Teorema C . . . . .	33
2.2.2. Demostración del lema 2.2.2 . . . . .	35
<b>3. K-jets de la aplicación de Poincaré</b>	<b>41</b>
3.1. El espacio de los k-jets para flujos magnéticos en superficies . . . . .	41
3.2. Caso general . . . . .	42
3.3. Familias k-generales . . . . .	43
3.4. Perturbación local para el Hamiltoniano Magnético . . . . .	46
3.4.1. Prueba de la proposición 3.4.2 . . . . .	51
3.5. Perturbación del k-jet . . . . .	51
3.5.1. Prueba del Teorema 3.1.2 . . . . .	53
<b>4. Lema de Franks</b>	<b>55</b>
4.1. Lema de Franks para flujos magnéticos en superficies . . . . .	55
4.2. Prueba del Teorema 4.1.1 . . . . .	58
<b>5. Flujos magnéticos con entropía top. positiva</b>	<b>67</b>

5.1. Aplicaciones Twist y entropía topológica . . . . .	67
5.2. Perturbación $C^1$ de la entropía topológica . . . . .	70
5.2.1. Acción simpléctica parcialmente hiperbólica . . . . .	75
5.2.2. Sucesiones periódicas de aplicaciones simplécticas lineales . . . . .	75
5.2.3. Demostración del Teorema F . . . . .	77
<b>A. Flujos Lagrangianos</b> . . . . .	<b>81</b>
A.1. Lagrangianos Autónomos Convexos y Superlineales . . . . .	81
A.2. Lagrangianos magnéticos en el toro $T^2$ . . . . .	86
<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>89</b>

## Introducción

Sean  $(M, g)$  una variedad riemanniana cerrada de clase  $C^\infty$  y  $\pi : TM \rightarrow M$  la proyección canónica. Sea  $\omega_0$  la estructura simpléctica en  $TM$  obtenida por el "pull-back" de la métrica de la estructura simpléctica canónica en  $T^*M$ .

Dada una 2-forma cerrada  $\Omega$  en  $M$ , consideremos la nueva estructura simpléctica en  $TM$  definida por:

$$\omega(\Omega) = \omega_0 + \pi^*\Omega$$

esta 2-forma es llamada *estructura simpléctica twist*.

Sea  $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$E(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v) \quad (\text{energía cinética}),$$

definimos el *campo magnético*  $X$  como el campo hamiltoniano de  $E$  en relación a forma Twist  $\omega(\Omega)$ , i.e.  $X$  satisface:

$$\omega(\Omega)(X, \cdot) = dE(\cdot).$$

Siendo  $\Omega$  cerrada, definimos la *Fuerza de Lorentz*

$$Y = Y(\Omega) : TM \rightarrow TM,$$

como la única aplicación lineal en las fibras, tal que:

$$\Omega(x)(u, v) = g_x(Y_x \cdot u, v), \quad \forall x \in M \text{ y } \forall u, v \in T_x M$$

Definimos el *flujo magnético* inducido por  $\Omega$ , como siendo el flujo

$$\phi_t : TM \rightarrow TM$$

asociado al campo hamiltoniano  $X$ . De este modo, una curva  $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \subset TM$  es una órbita del flujo magnético, si y sólo si, la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ , satisface:

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = Y_\gamma(\dot{\gamma}) \quad (1)$$

con las condiciones iniciales  $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = \theta$ . Dicho de otro modo, el flujo magnético  $\phi$  describe las trayectorias de una partícula de masa 1 bajo el efecto de un campo magnético

cuya fuerza de Lorentz es  $Y(\Omega)$  (Ley de Newton). En particular si  $\Omega \equiv 0$  entonces  $X^0$  es el campo geodésico. Una curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  que satisface (1) es llamada  $\Omega$ -geodésica magnética.

Cuando  $\Omega$  es exacta ( $\Omega = d\eta$ ), podemos definir el lagrangiano  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$L(x, v) = E(x, v) - \eta_x(v)$$

y la funcional de la acción de  $L$  sobre una curva absolutamente continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , por:

$$A_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma, \dot{\gamma}) dt.$$

Calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange de  $L$ , obtenemos que las extremales de la funcional de la acción satisfacen la ecuación (1), por lo tanto, el flujo de Euler-Lagrange de  $L$  y el flujo magnético coinciden. En este caso el flujo asociado a  $d\eta$  es llamado *flujo magnético exacto*.

## Propiedades Genéricas

Vamos a restringir nuestro estudio al caso en que  $(M, g)$  es una superficie riemanniana, cerrada y orientable.

Sea  $\Omega_0$  la forma de área en  $M$  inducida por la métrica  $g$ . Siendo  $M$  una superficie, dada una 2-forma  $\Omega \in \Omega^2(M)$ , existe una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^\infty$ , tal que  $\Omega = f \cdot \Omega_0$ . Por lo tanto  $\Omega^2(M)$  es un espacio vectorial sobre  $C^\infty(M)$  de dimensión 1. Así podemos definir de modo natural la topología  $C^r$  en  $\Omega^2(M)$ . Recordemos que un subconjunto  $\mathcal{O} \subset C^\infty(M) \approx \Omega^2(M)$  es dicho  $C^r$ -residual, cuando  $\mathcal{O}$  es igual a una intersección numerable de abiertos densos en la topología  $C^r$ . Vamos ahora a definir el concepto de una propiedad genérica para la clase de flujos estudiados.

### Definición ( Propiedad Genérica ).

Decimos que una propiedad  $P$  es  $C^r$ -genérica para los flujos magnéticos si para cada nivel de energía positivo  $T^cM = E^{-1}(c)$ , existe un subconjunto  $C^r$ -residual  $\mathcal{O}_P(c) \subset \Omega^2(M)$ , tal que, la propiedad  $P$  es válida para todo flujo magnético  $\phi_t^\Omega$  restringido a  $T^cM$ , con  $\Omega \in \mathcal{O}_P(c)$ , y además, para cada clase de cohomología  $h \in H^2(M, \mathbb{R})$ , el subconjunto

$$\mathcal{O}_P(c, h) := \mathcal{O}_P(c) \cap \{\Omega \in \Omega^2(M); [\Omega] = h\}$$

es  $C^r$ -residual en  $\{\Omega \in \Omega^2(M); [\Omega] = h\}$ .

Observe que en nuestra definición de una propiedad genérica estamos pidiendo que tal propiedad sea genérica en el sentido usual ( sentido de Baire ) para todos los flujos magnéticos y para el subconjunto de los flujos magnéticos con una clase de cohomología fija, en particular para los flujos magnéticos exactos.

Sea  $\Omega$  una 2-forma en  $M$ . Supongamos que  $\theta_t = \phi_t^\Omega(\theta) : [0, T] \rightarrow TM$  es una órbita periódica de período  $T > 0$ . Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie local contenida en el nivel de energía  $T^cM = E^{-1}(E(\theta)) \subset TM$ , transversal al flujo en el punto  $\theta_0 = \theta$ . La aplicación de Poincaré del flujo de una vecindad de  $\theta \in U_\theta \subset \Sigma$  en  $\Sigma$  esta dada por:

$$P(\Sigma, \Omega) : \Sigma \supset U_\theta \rightarrow \Sigma \\ u \mapsto \phi_{\tau(u)}^\Omega(u)$$

donde  $\tau : U_\theta \rightarrow \mathbb{R}$  es el tiempo del primer retorno de la órbita  $\phi_t^\Omega(u)$  en  $\Sigma$ . Recordemos que  $P(\Sigma, \Omega)$  es un simplectomorfismo con respecto a la estructura simpléctica inducida por la forma twist  $\omega(\Omega)$  en  $\Sigma$ . Usando un sistema de coordenadas de Darboux podemos suponer que  $\Sigma$  es una vecindad de 0 en  $\mathbb{R}^2$ , la forma twist en  $\Sigma$  es la forma de área en  $\mathbb{R}^2$  y que  $P(0) = 0$ .

Decimos que una órbita periódica  $\theta_t$  de período  $T > 0$  es *no-degenerada* si la aplicación de Poincaré linealizada  $d_{\theta_0}P$  no posee autovalor igual a 1. El siguiente teorema es una extensión del Teorema de las Métricas Bumpy ( atribuido a R. Abraham [1] y también probado por Anosov en [4] ) a los flujos magnéticos en superficies.

**Teorema A.** *La Propiedad  $P_1$  : Todas las órbitas periódicas son no-degeneradas, es  $C^r$ -genérica para los flujos magnéticos en una superficie cerrada y orientable, con  $1 \leq r \leq \infty$ .*

Para cada  $a, c > 0$ , vamos a considerar los subconjuntos:

$$G(c, a) = \{\Omega \in \Omega^2(M) \mid \text{todas las órbitas periódicas de } \phi_t^\Omega|_{T^cM} \text{ con período } < a \in \mathbb{R}^+, \text{ son no-degeneradas}\} \quad (2)$$

y siendo que

$$\mathcal{O}_{P_1}(c) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} G(c, N),$$

para probar el Teorema A, basta mostrar que:

**Proposición B.** *Dados  $c, a > 0$  y  $r \in \mathbb{N}$ , el subconjunto  $G(c, a) \subset \Omega^2(M)$  es abierto en la topología  $C^r$ . Además, para toda clase de cohomología  $h \in H^2(M, \mathbb{R})$ , el subconjunto*

$$G_h(c, a) = G(c, a) \cap \{[\Omega] = h\}$$

es denso en  $\{[\Omega] = h\} \subset \Omega^2(M)$ .

La abertura del conjunto  $G(c, a)$  es una simple consecuencia de que la propiedad  $P_1$  es abierta para campos vectoriales, y por lo tanto también es válida en dimensiones mayores que 2. El problema es probar la densidad. Para esto vamos a seguir los pasos de la inducción ( inducción finita), utilizada en la demostración de Peixoto, en [33], del Teorema de Kupka-Smale para flujos y también por Anosov [4] en la prueba del teorema de las Métricas Bumpy.

Recordemos que una órbita periódica  $\theta_t$  es *hiperbólica* si la aplicación de Poincaré linealizada no posee autovalor de norma igual a 1. Definimos las subvariedades estable fuerte y inestable fuerte de una órbita hiperbólica  $\theta_t$  en el punto  $\theta = \theta_0$ , por:

$$W^{ss}(\theta) = \{v \in T^cM; \lim_{t \rightarrow \infty} d(\theta_t, \phi_t^f(v)) = 0\}$$

$$W^{us}(\theta) = \{v \in T^cM; \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\theta_t, \phi_t^f(v)) = 0\}$$

respectivamente y definimos las subvariedades estable e inestable (débiles) de  $\theta_t$ , por:

$$W^s(\theta_t) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t^f(W^{ss}(\theta)) \text{ y } W^u(\theta_t) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t^f(W^{us}(\theta))$$

respectivamente. Observe que  $W^s(\theta_t)$  y  $W^u(\theta_t)$  son subvariedades lagrangianas inmersas en el nivel de energía que contiene el punto  $\theta$ . Decimos que un punto  $\xi \in T^cM$  es un *punto heteroclínico* cuando

$$\xi \in W^s(\vartheta_t) \cap W^u(\theta_t),$$

donde  $\theta_t$  y  $\vartheta_t$  son dos órbitas hiperbólicas contenidas en  $T^cM$ . Cuando esta intersección es transversal en  $T^cM$ , i.e

$$T_\xi W^s(\vartheta_t) \oplus T_\xi W^u(\theta_t) = T_\xi T^cM,$$

decimos que  $\xi$  es un *punto heteroclínico transversal*.

El siguiente teorema nos da una propiedad  $C^k$ -genérica para flujos magnéticos en una superficie, análogo al Teorema de Kupka-Smale.

**Teorema C.** *La siguiente propiedad*

$$P_{K-S} : \begin{cases} (i) & \text{todas las órbitas periódicas son no-degeneradas y} \\ (ii) & \text{todo los puntos heteroclínicos son transversales,} \end{cases}$$

es  $C^r$ -genérica para flujos magnéticos, para todo  $1 \leq r \leq \infty$ .

Ahora vamos a recordar la definición del espacio de los jets para aplicaciones simplécticas en  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Sea  $Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$  el espacio de los simplectomorfismos

$$f : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$$

de clase  $C^\infty$ , tales que  $f(0) = 0$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$  consideremos la relación de equivalencia  $\sim_k$  en  $Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ , definida por:

$$f \sim_k g \Leftrightarrow \text{sus polinomios de Taylor de grado } k \text{ en cero son iguales.}$$

Dado  $f \in Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ , definimos el  $k$ -jet de  $f$ , al cual denotaremos por  $jet^k(f) = jet^k(f)(0)$ , como siendo su clase de equivalencia con respecto a la relación  $\sim_k$ . El espacio de los  $k$ -jets simplécticos  $J_s^k(n)$  es el conjunto de todas las clases de equivalencia con respecto a

relación  $\sim_k$  de elementos de  $Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ . Observemos que  $J_s^k(n)$  es un espacio vectorial, además, considerando la estructura producto en  $J_s^k(n)$  definida como:

$$jet^k(f) \cdot jet^k(g) = jet^k(f \circ g) \quad \forall f, g \in Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0),$$

tenemos que  $J_s^k(n)$  es un grupo de Lie. Cuando  $k = 1$ , podemos identificar  $J_s^1(n)$  con el grupo de Lie clásico  $Sp(n)$ .

Decimos que un subconjunto  $Q \in J_s^k(n)$  es *invariante* cuando para todo  $\sigma \in J_s^k(n)$ , vale

$$\sigma \cdot Q \cdot \sigma^{-1} = Q.$$

El subconjunto  $Q \subset J_s^k(n)$  de todas las aplicaciones simplécticas  $f : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ , tales que  $\det(d_0 f - I) \neq 1$ , es claramente un subconjunto invariante de  $J_s^k(n)$ . Observe que dado un subconjunto  $Q \subset J_s^k(1)$  invariante, la propiedad de que el  $k$ -jet de una aplicación de Poincaré sobre una órbita periódica pertenece a  $Q$  no depende de la sección transversal y tampoco del sistema de coordenadas elegido.

**Teorema D** *Dado  $Q \subset J_s^k(1)$  abierto, denso e invariante, la propiedad  $P_Q$ : para toda órbita periódica el  $k$ -jet de la aplicación de Poincaré pertenece a  $Q$ , es  $C^r$ -genérica para flujos magnéticos en una superficie orientable y cerrada, con  $r > k$ .*

## Entropía Topológica

La *entropía topológica* es el invariante dinámico mas importante que se puede asociar a un flujo para medir la complejidad de la estructura de sus órbitas. Vamos a denotar por  $h_{top}(\Omega, c)$  la entropía topológica del flujo magnético  $\phi_t^\Omega$  restringido al nivel de energía positivo  $T^cM$ . Si  $h_{top}(\Omega, c) > 0$ , para alguna 2-forma  $\Omega$  y  $c > 0$ , por Katok [17], la dinámica de  $\phi_t^\Omega|_{T^cM}$  presenta una órbita homoclínica transversal y consecuentemente el número de órbitas periódicas hiperbólicas crece exponencialmente con relación al tiempo.

Uno de nuestros principales resultados en este sentido puede ser enunciado como:

**Teorema E.** *Sean  $M$  una superficie cerrada y orientable, y  $\Omega$  una 2-forma en  $M$ . Supongamos que el flujo magnético  $\phi_t^\Omega$  posee una órbita periódica no-hiperbólica contenida en un nivel de energía positivo  $T^cM = E^{-1}(c)$ . Entonces existe una 2-forma exacta  $d\eta$ , de norma arbitrariamente chica en la topología  $C^r$ , con  $4 \leq r \leq \infty$ , tal que  $h_{top}(\Omega + d\eta, c) > 0$ .*

Recordemos que un subconjunto compacto  $\Gamma \subset T^cM = E^{-1}(c)$  e invariante por el flujo magnético  $\phi_t^\Omega|_{T^cM}$  es un *conjunto hiperbólico* si existe una descomposición invariante (continua)

$$T_\Gamma(T^cM) = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

donde  $E^c = \langle X^\Omega \rangle$  y existen constantes  $C > 0$  y  $0 < \lambda < 1$ , tales que:

- (a)  $|d_\theta \phi_t^\Omega(\xi)| \leq C\lambda^t |\xi|$ ,  $\forall t > 0$ ,  $\theta \in \Gamma$ ,  $\xi \in E^s$ ,  
 (b)  $|d_\theta \phi_{-t}^\Omega(\xi)| \leq C\lambda^t |\xi|$ ,  $\forall t > 0$ ,  $\theta \in \Gamma$ ,  $\xi \in E^u$ .

Para cada  $c > 0$ , sea  $\mathcal{R}^1(M, c)$  el subconjunto de las 2-formas  $\Omega$  en  $M$ , tales que toda  $\Omega$ -geodésica magnética cerrada de velocidad  $c$  es hiperbólica, endosado con la topología  $C^1$ . Dado  $h \in H^2(M, \mathbb{R})$ , consideremos  $\mathcal{F}^1(M, c, h) \subset \Omega^2(M)$  definido como:

$$\mathcal{F}^1(M, c, h) = \text{int}_{C^1}(\mathcal{R}^1(M, c)) \cap \{[\Omega] = h\}.$$

Dado  $\Omega \in \mathcal{F}^1(M, c, h)$ , denotemos por  $\text{Per}(\Omega, c)$  el conjunto de todas las órbitas periódicas hiperbólicas de período minimal del flujo  $\phi_t^\Omega|_{T^c M}$ . Por definición tenemos que  $\overline{\text{Per}(\Omega, c)} \subset T^c M$  es un subconjunto compacto e invariante por el flujo  $\phi_t^\Omega|_{T^c M}$ .

Usando las técnicas de descomposición dominada del trabajo de Mañé [25] y el Lema de Franks para flujos magnéticos en superficies ( Corolario 4.1.2 ), vamos a probar que:

**Teorema F** Sean  $c > 0$  y  $\Omega \in \mathcal{F}^1(M, c, [\Omega])$ . Entonces  $\overline{\text{Per}(\Omega, c)} \subset T^c M$  es un conjunto hiperbólico.

Combinando el Teorema E y el Teorema F, obtenemos:

**Teorema G.** Sean  $M$  una superficie cerrada y orientable, y  $\Omega$  una 2-forma en  $M$ . Supongamos que en flujo magnético  $\phi_t^\Omega$  posee infinitas órbitas periódicas de período minimal, contenidas en un nivel de energía positivo  $T^c M = E^{-1}(c)$ . Entonces existe una 2-forma exacta  $d\eta \in \Omega^2(M)$  de norma arbitrariamente chica, en la topología  $C^1$ , tal que  $h_{\text{top}}(\Omega + d\eta, c) > 0$ .

Sea  $p : M_u \rightarrow M$  el recubrimiento universal de  $M$ . Dado un punto  $x \in M_u$  y  $T > 0$ , definimos la bola magnética de centro  $x$  y radio  $T$  como el subconjunto dado por:

$$B_{\text{mag}}(\Omega, x, T) := \{y \in M_u \ ; \ \text{existe una } \Omega\text{-geodésica magnética del punto } x \text{ al punto } y \text{ de longitud } < T\}.$$

Sea  $\text{Vol } B_{\text{mag}}(\Omega, x, T)$  el volumen riemanniano de  $B_{\text{mag}}(\Omega, x, T)$ . La aplicación

$$x \mapsto \text{Vol } B_{\text{mag}}(\Omega, x, T)$$

es invariante por aplicaciones de recubrimientos (cf. [6, pg. 17]), por lo tanto define una aplicación en  $M$ , a la cual denotaremos del mismo modo.

El siguiente resultado fue probado por Bruns y Paternain en [6].

**Teorema 5.2.2.** Sea  $h_v(\Omega, c)$  la tasa de crecimiento exponencial de las bolas magnéticas, i.e.

$$h_v(\Omega, c) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \int_M \text{Vol } B_{\text{mag}}(\Omega, c, x, T) dx.$$

Entonces

$$h_v(\Omega, c) \leq h_{\text{top}}(\Omega, c).$$

Si  $\phi_t^\Omega|_{T^c M}$  es Anosov, entonces vale la igualdad.

Si  $\Omega$  es una 2-forma débilmente exacta en  $M$ , i.e. existe una 1-forma  $\eta$  en  $M^u$  tal que  $p^*\Omega = d\eta$ , podemos definir el valor crítico del flujo magnético asociado a  $\Omega$  (cf. [6] y [27, 10]), como:

$$c(\Omega) := \inf\{k \in \mathbb{R}; A_{L+k}(\gamma) \geq 0 \text{ para toda curva cerrada } \gamma \text{ absolutamente continua}\},$$

donde  $L : TM^u \rightarrow \mathbb{R}$  denota al lagrangiano correspondiente al levantamiento del flujo  $\phi_t^\Omega$  al recubrimiento universal de  $M$ . La prueba de la siguiente proposición también puede ser vista en [6].

**Proposición 5.2.3.** Supongamos que  $c > c(\Omega)$ . Entonces  $h_v(\Omega, c)$  es positivo, si y solamente si  $\pi_1(M)$  tiene crecimiento exponencial.

En dimensión 2, es un hecho bien conocido que el grupo fundamental de  $M$  tiene crecimiento exponencial, si y solamente si  $M$  es una superficie de genero  $g \geq 2$ . Por lo tanto, combinando la Proposición 5.2.3 y el Teorema 5.2.2, tenemos que si  $M$  es una superficie de genero  $g \geq 2$ , entonces  $h_{\text{top}}(\Omega, c) > 0$ , para toda 2-forma  $\Omega$  en  $M$  y para todo  $c > c(\Omega)$ .

Cuando  $\Omega = d\eta$ , el campo magnético exacto asociado a  $d\eta$  coincide con el flujo de Euler-Lagrange para el lagrangiano convexo y superlineal  $L_\eta : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , definido como:

$$L_\eta(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v) - \eta_x(v).$$

Recordemos que el valor crítico estricto de Mañé [27, 10] y [32], puede ser definido como:

$$c_0(L_\eta) = \inf\{k \in \mathbb{R}; A_{L_\eta+k}(\Gamma) \geq 0 \text{ para toda curva cerrada absolutamente continua homóloga a cero}\}.$$

Observe que por la desigualdad A.2, vale  $c(\Omega) \leq c_0(L)$ .

Para una superficie  $M$  arbitraria, sabemos que la restricción del flujo magnético al nivel de energía  $T^c M$ , con  $c > c_0(L_\eta)$ , puede ser visto como una reparametrización de un flujo geodésico en el fibrado tangente unitario para una apropiada métrica Finsler (cf. [8]). Varios resultados de flujos geodésicos para una métrica Riemanniana siguen siendo válidos para métricas Finsler. Pero en contraste con el caso riemanniano, existen ejemplos de métricas Finsler bumpy no-simétricas en  $S^2$ , con sólo dos geodésicas cerradas. Estos ejemplos son debido a Katok [18] y son estudiados geoméricamente por Ziller en [40].

El siguiente teorema fue probado por Radamacher en [34, Teorema 3.1(b)] para flujos geodésicos en una variedad compacta simplemente conexa satisfaciendo cierta condición

sobre el álgebra de cohomología racional  $H^*(M, \mathbb{Q})$ . Tal condición se verifica en el caso en que  $M = S^2$  y el teorema sigue siendo válido para métricas Finsler bumpy (cf. [34, pg. 81]). Por lo tanto, para simplificar la notación, podemos enunciarlo como:

**Teorema 5.2.5.** *Sea  $F : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una métrica Finsler Bumpy en  $S^2$ . Supongamos que existe sólo un número finito de geodésicas cerradas para  $F$  en  $S^2$ . Entonces existe una geodésica cerrada elíptica, en particular no-hiperbólica.*

Luego, combinando el Teorema 5.2.5 con los Teoremas A, E y G, tenemos que:

**Proposición H.** *Sea  $\Omega = d\eta$  una 2-forma exacta en  $S^2$ . Entonces, para cada  $c > c_0(L_\eta)$  existe una 2-forma exacta  $d\bar{\eta}$  en  $S^2$  de norma arbitrariamente chica, en la topología  $C^1$ , tal que  $h_{top}(d(\eta + \bar{\eta}), c) > 0$ .*

En el caso del toro bidimensional  $T^2$ , podemos usar el siguiente teorema, cuya prueba puede ser vista en [26].

**Teorema 5.2.6. (Teorema de Tonelli para curvas cerradas)**

*Sea  $L$  un lagrangiano convexo y superlineal en una variedad cerrada  $M$ . Entonces dado  $h \in H_1(M, \mathbb{Z})$ , para cada  $a > 0$ , existe una órbita cerrada  $(\gamma, \dot{\gamma}) : [0, a] \rightarrow TM$ , tal que:*

$$[\gamma] = h \quad \text{y} \quad A_L(\gamma) \leq A_L(\alpha),$$

para toda curva absolutamente continua  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ , con  $[\alpha] = h$ .

Siendo  $H(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ , aplicando el Teorema 5.2.6 al lagrangiano definido como  $L = F^2$ , donde  $F$  es una métrica Finsler, concluimos que existen infinitas geodésicas cerradas. Por lo tanto, por el Teorema G, tenemos:

**Proposición I.** *Sea  $\Omega = d\eta$  una 2-forma exacta en  $T^2$ . Entonces, para cada  $c > c_0(L_\eta)$  existe una 2-forma exacta  $d\bar{\eta} \in \Omega^2(T^2)$  de norma arbitrariamente chica en la topología  $C^1$ , tal que  $h_{top}(d(\eta + \bar{\eta}), c) > 0$ .*

En el Apéndice A, usando los resultados de [29], [11] y [28], vamos a extender el resultado de la Proposición I para perturbaciones en la topología  $C^\infty$ .

## Capítulo 1

### Preliminares

En este capítulo vamos a discutir los resultados básicos de flujos que vamos a utilizar en los siguientes capítulos y haremos una breve introducción de los flujos magnéticos utilizando el formalismo simpléctico en  $TM$ .

#### 1.1. Órbitas periódicas no-degeneradas de un flujo y transversalidad

Inicialmente vamos a recordar algunas definiciones y resultados generales para flujos en variedades compactas. Consideremos  $N$  una variedad compacta de dimensión  $n$  y  $\phi : N \times \mathbb{R} \rightarrow N$  un flujo asociado a un campo  $X$  de clase  $C^k$ , con  $k \geq 2$ .

Sea  $\theta \in N$ , tal que  $\phi_t(\theta)$  es una órbita periódica, con período  $T > 0$ , y sea  $\Sigma \subset N$  una sección transversal al flujo en el punto  $\theta$ . La aplicación del primer retorno de Poincaré del flujo de una vecindad de  $U_\theta \subset \Sigma$  en  $\Sigma$  es dada por:

$$P : \Sigma \supset U_\theta \rightarrow \Sigma$$

$$u \mapsto \phi_{\tau(u)}(u)$$

donde  $\tau : U_\theta \rightarrow \mathbb{R}$  es el tiempo del primero retorno de la órbita  $\phi_t(u)$  en  $\Sigma$ . Por lo tanto  $\theta$  es un punto fijo de  $P$ .

**Definición 1.1.1.** *Decimos que una órbita periódica  $\phi_t(\theta)$ , de período  $T$  es no-degenerada de orden  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , cuando la derivada  $d_\theta P : T_\theta \Sigma \rightarrow T_\theta \Sigma$  no posee autovalores que son raíces  $n$ -ésima de la unidad.*

Es claro que la definición no depende de la sección transversal y que el orden depende de la elección del período.

Sea

$$d_\theta \phi_T : T_\theta N \rightarrow T_\theta N$$

la derivada de  $\phi_T$  en el punto  $\theta \in N$ . Derivando la identidad  $\phi_s \circ \phi_t(\theta) = \phi_t \circ \phi_s(\theta)$  en relación a  $s$  y evaluando en  $s = 0$ , obtenemos:

$$d_\theta \phi_t \cdot \left( \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\phi_s(\theta)) \right) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \phi_s(\phi_t(\theta)).$$

Luego

$$d_\theta \phi_t \cdot X(\theta) = X(\phi_t(\theta)) \quad (1.1)$$

Por lo tanto  $X$  es un autovector de la aplicación lineal  $d\phi_T(\theta)$  con autovalor 1. Calculando la derivada de  $P$  en  $\theta$ , aplicada al vector  $\xi \in T_\theta \Sigma \subset T_\theta N$ , tenemos:

$$d_\theta P \cdot \xi = d_\theta \phi_T \cdot \xi + \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=T} \phi_t(\theta) \right) d_\theta \tau(\xi) = d_\theta \phi_T \cdot \xi + \beta(\xi)X(\theta),$$

donde  $\beta = d_\theta \tau : T_\theta \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Así, escribiendo  $T_\theta N = \langle X \rangle \oplus T_\theta \Sigma$ , tenemos que  $d_\theta \phi_T$  y  $d_\theta P$  están relacionadas del siguiente modo:

$$d_\theta \phi_T = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & d_\theta P \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Luego, si  $\lambda$  es un autovalor de  $d_\theta P$ , también lo es para  $d_\theta \phi_T$ . Esto implica que la definición 1.1.1 es equivalente a que la matriz de  $d\phi_T(\theta)$  posee un único autovalor que es raíz  $n$ -ésima de la unidad (contando las multiplicidades).

Ahora vamos a dar una descripción de la no-degenerabilidad en el contexto de la teoría de aplicaciones transversales.

Consideremos la aplicación

$$F = \text{Graf}(\phi) : N \times \mathbb{R} \rightarrow N \times N.$$

Sea  $\Delta = \{(\theta, \theta) \in N \times N; \theta \in N\}$  la diagonal, que es una subvariedad cerrada de  $N \times N$ . Observemos que  $\phi_t(\theta)$  es una órbita periódica no-degenerada (de orden 1), con período  $T > 0$ , si y sólo si  $F \cap_{(\theta, T)} \Delta$ . De hecho, es claro que  $F(\theta, T) \in \Delta$ , si y sólo si,  $\phi_T(\theta) = \theta$  y por la condición de transversalidad tenemos que  $F \cap_{(\theta, T)} \Delta$ , si y sólo,

$$d_{(\theta, T)} F(T_\theta N \times \mathbb{R}) \oplus T_{(\theta, \theta)} \Delta = T_\theta N \times T_\theta N.$$

Puesto que  $d_{(\theta, T)} F = (I, D_\theta \phi_T + X(\theta))$  y  $T_\theta \Delta = \{(\zeta, \zeta), \zeta \in T_\theta N\}$ , la igualdad de arriba es equivalente a que dados  $(\xi_1, \xi_2) \in T_\theta N \times T_\theta N$ , la ecuación

$$\begin{cases} \xi_1 = & \xi + \zeta \\ \xi_2 = & d_\theta \phi_T \cdot \xi + xX(\theta) + \zeta \end{cases}$$

tenga solución para  $\xi, \zeta \in T_\theta N$  y  $x \in \mathbb{R}$ , lo que significa que tomando  $\zeta = \xi_1 - \xi$ , se puede resolver

$$\xi_2 - \xi_1 = d_\theta \phi_T \cdot \xi - \xi + xX(\theta),$$

i.e.  $d_\theta \phi_T - I$  es sobreyectiva a un complemento del campo, que por la observación anterior es equivalente a que  $\phi_t(\theta)$  sea no-degenerada.

De la teoría general de transversalidad nos será útil el siguiente resultado de Abraham en [2].

**Teorema 1.1.2.** Sea  $X$  una variedad con frontera,  $K \subset X$  un subconjunto cualquiera,  $Y$  una variedad sin frontera, y  $W$  una subvariedad cerrada de  $Y$  de codimensión finita  $q$ , todas de clase  $C^r$ . Sea  $A \subset C^r(X, Y)$  una  $C^r$  variedad de aplicaciones. Si la evaluación de  $A$

$$\begin{aligned} ev : X \times A &\rightarrow Y \\ (x, f) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

es transversal a  $W$  en  $K$  y  $r > \max\{(n-q), 0\}$ , entonces el subconjunto de las aplicaciones  $f \in A$  transversales a  $W$  en  $K$  es denso en  $A$ .  $\square$

## 1.2. Flujos Magnéticos

Sean  $(M, g)$  una variedad riemanniana cerrada de clase  $C^\infty$ ,  $\pi : TM \rightarrow M$  la proyección canónica y  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita de  $(M, g)$ . Usando  $\nabla$  podemos definir una conexión

$$K : TTM \rightarrow TM,$$

del siguiente modo: dados  $\xi \in T_\theta TM$  y  $z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$  una curva adaptada a  $\xi$ , i.e.  $z$  satisface  $z(0) = \theta$  y  $\dot{z}(0) = \xi$ , entonces  $z(t) = (\pi \circ z(t), V(t))$  donde  $V$  es un campo vectorial sobre la curva  $\pi \circ z(t)$ . Definimos

$$K_\theta(\xi) := \nabla_{(\pi \circ z(t))} V(0).$$

De este modo obtenemos una descomposición del espacio vectorial  $T_\theta TM$  en suma directa de dos subespacios llamados Vertical y Horizontal, definidos por:

$$V(\theta) = \text{Ker}(d_\theta \pi) \subset T_\theta TM \quad \text{y} \quad H(\theta) = \text{ker}(K_\theta) \subset T_\theta TM$$

respectivamente. Usando el isomorfismo

$$\begin{aligned} j_\theta : T_\theta TM &\rightarrow T_{\pi(\theta)} M \times T_{\pi(\theta)} M \\ \xi &\mapsto (d_\theta \pi(\xi), K_\theta(\xi)) \end{aligned}$$

obtenemos la indentificación:

$$T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta) \approx T_{\pi(\theta)} M \times T_{\pi(\theta)} M.$$

Así, podemos definir la métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $TM$ , como la métrica producto, i.e.

$$\langle \xi, \eta \rangle_\theta = g_{\pi(\theta)}(d_\pi(\xi), d_\pi(\eta)) + g_{\pi(\theta)}(K_\theta(\xi), K_\theta(\eta)), \quad \forall \xi, \eta \in T_\theta TM$$

y una estructura casi compleja  $J_\theta$  en  $T_\theta TM$ , dada por  $J_\theta(\xi_h, \xi_v) = (-\xi_v, \xi_h)$ , donde  $\xi = (\xi_h, \xi_v) \in H(\theta) \oplus V(\theta)$ . De este modo la forma simpléctica canónica en  $TM$  se escribe como:

$$\omega_0(\theta)(\xi, \eta) = \langle J_\theta \cdot \xi, \eta \rangle_\theta = g_{\pi(\theta)}(d_\pi(\xi), K_\theta(\eta)) - g_{\pi(\theta)}(K_\theta(\xi), d_\pi(\eta)) \quad (1.3)$$

Por construcción  $H(\theta)$  y  $V(\theta)$  son subespacios lagrangianos de  $(T_\theta TM, \omega_0(\theta))$ .

Dada una 2-forma cerrada  $\Omega$  en  $M$  consideremos la nueva estructura simpléctica en  $TM$  definida por:

$$\omega(\Omega) = \omega_0 + \pi^* \Omega$$

esta 2-forma es llamada *estructura simpléctica twist*.

Sea  $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$E(x, v) = \frac{1}{2} g_x(v, v) \quad (\text{energía cinética}),$$

definimos el *campo magnético*  $X = X(\Omega)$  como el campo hamiltoniano de  $E$  en relación a forma Twist  $\omega(\Omega)$ , i.e.  $X$  satisface:

$$\omega(\Omega)(X, \cdot) = dE(\cdot).$$

Siendo  $\Omega$  cerrada, definimos la *Fuerza de Lorentz*  $Y = Y(\Omega) : TM \rightarrow TM$  como la única aplicación lineal en las fibras tal que:

$$\Omega(x)(u, v) = g_x(Y_x \cdot u, v), \quad \forall x \in M \text{ y } \forall u, v \in T_x M$$

A cada  $\xi \in T_\theta TM$ , escribiendo  $\theta = (x, v)$ ,  $\xi = (\xi^h, \xi^v)$  y  $X(\theta) = (X(\theta)^h, X(\theta)^v)$ , aplicando la definición de  $\omega(\Omega)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \omega(\Omega)_\theta(X(\theta), \xi) &= (\omega_0)_\theta(X(\theta), \xi) + (\pi^* \Omega)_\theta(X(\theta), \xi) = \\ &= g_x(X(\theta)^h, \xi^v) - g_x(X(\theta)^v, \xi^h) + \Omega_x(X(\theta)^h, \xi^h) = \\ &= g_x(X(\theta)^h, \xi^v) - g_x(X(\theta)^v, \xi^h) + g_x(Y_x \cdot X(\theta)^h, \xi^h) = \\ &= g_x(X(\theta)^h, \xi^v) + g_x(Y_x \cdot X(\theta)^h - X(\theta)^v, \xi^h). \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$  es una curva adaptada a  $\xi$  y  $V(t)$  es un campo de vectores a lo largo de la curva  $\pi \circ z(t)$ , tal que  $z(t) = (\pi \circ z(t), V(t))$ , entonces:

$$dE(\theta)(\xi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{2} g(V(t), V(t)) = g(\nabla_{\dot{\alpha}} V(0), V(0)) = g_x(\xi_v, v) \quad (1.4)$$

igualando los dos términos obtenemos

$$X(\theta) = (v, Y_x(v)) \in H(\theta) \oplus V(\theta). \quad (1.5)$$

Note que si  $\theta \in T^c M = E^{-1}\{c\}$ , para algún  $c > 0$ , entonces  $X(\theta) \neq 0$ .

Definimos el *flujo magnético* inducido por un 2-forma cerrada  $\Omega \in \Omega^2(M)$ , como el flujo

$$\phi_t = \phi_t(\Omega) : TM \rightarrow TM$$

asociado al campo hamiltoniano  $X$ . Por la igualdad (1.5), tenemos que

$$t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \phi_t(\theta)$$

es una órbita del flujo magnético, si y sólo, la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ , satisface:

$$\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = Y_\gamma(\dot{\gamma})$$

con las condiciones iniciales  $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = \theta$ . Dicho de otro modo, el flujo magnético  $\phi$  describe las trayectorias de una partícula de masa 1 bajo el efecto de un campo magnético cuya fuerza de Lorentz es  $Y(\Omega)$  (Ley de Newton). En particular si  $\Omega \equiv 0$  entonces  $X^0$  es el campo geodésico.

### 1.2.1. Ecuaciones de Jacobi

Fijemos un punto  $\theta = (x, v) \in TM$  y sea  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \phi_t^\Omega(\theta)$  su órbita por el flujo magnético. Dado  $\xi \in T_\theta TM$ , sea  $z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$  una curva adaptada a  $\xi$ . Definimos el *Campo de Jacobi*  $J_\xi(t)$  como el campo de vectores a lo largo de  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ , dado por:

$$J_\xi(t) := \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \pi \circ \phi_t^\Omega(z(s))$$

Denotemos por  $\gamma_s(t)$  la trayectoria correspondiente a la órbita por el flujo del punto  $z(s)$ , i.e.  $\gamma_s(t) = \pi \circ \phi_t(z(s))$ . Siendo que  $\gamma_s$  satisface la ecuación (1), derivando de ambos los lados en relación a  $s$ , obtenemos:

$$\frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \left( \frac{D}{dt} \dot{\gamma}_s(t) \right) = \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} (Y_{\gamma_s(t)} \cdot \dot{\gamma}_s(t)).$$

Recordemos que el tensor de curvatura Riemanniana (cf. [13, pg. 89]) satisface la identidad:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial s} \gamma_s, \frac{\partial}{\partial t} \gamma_s\right) \frac{\partial}{\partial t} \gamma_s = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \dot{\gamma}_s(t) - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \dot{\gamma}_s(t). \quad (1.6)$$

Usando la simetría de  $\nabla$ , obtenemos que  $J_\xi$  satisface la ecuación:

$$\frac{D^2}{ds^2} J_\xi - R(\dot{\gamma}, J_\xi) \dot{\gamma} = \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} (Y_{\gamma_s(t)} \cdot \dot{\gamma}_s(t)).$$

Siendo la aplicación  $(x, v) \mapsto Y_x \cdot v$  un  $(0,1)$ -tensor, extendiendo la conexión a los tensores (cf. [38]), vale:

$$\frac{D}{ds} \Big|_{s=0} (Y_{\gamma_s} \cdot \dot{\gamma}_s) = \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s} Y \right) \cdot \dot{\gamma} + Y_\gamma \cdot \frac{D}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_s \right). \quad (1.7)$$

Usando ( 1.6 ) y ( 1.7 ), obtenemos las ecuaciones de Jacobi del flujo magnético, sobre  $\gamma$ :

$$\frac{D^2}{dt^2} J_\xi + R(\dot{\gamma}, J_\xi) \dot{\gamma} - (\nabla_{J_\xi} Y) \cdot \dot{\gamma} - Y \cdot \frac{D}{dt} J_\xi = 0. \quad (1.8)$$

Utilizando la decomposición de  $TTM$  en los subhaces horizontal y vertical, podemos escribir la derivada del flujo en  $T^cM$ , como:

$$d\phi_t(\theta)(\xi) = \left( J_\xi(t), \frac{D}{dt} J_\xi(t) \right), \quad \forall \xi \in T_\theta T^cM. \quad (1.9)$$

De hecho, por la definición de  $J_\xi$  valen:

$$\begin{cases} J_\xi(t) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\pi \circ \phi_t(z(s))) = d_\theta(\pi \circ \phi_t)(\xi) = d\pi(\phi_t(\theta)) \circ d\phi_t(\theta)(\xi), \\ \frac{D}{dt} J_\xi(t) &= \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\pi \circ \phi_t(z(s))) = \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} (\pi \circ \phi_t(z(s))) = \\ &= \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_s(t) = K_{\phi_t(\theta)}(d\phi_t(\theta)(\xi)) \end{cases}$$

lo que prueba la igualdad ( 1.9 ).

### 1.3. Flujos Magéticos en una Superficie

Sea  $(M, g)$  una superficie riemanniana, cerrada y orientable. Dado  $\theta = (x, v) \in TM$ , existe una única isometría lineal  $Y^0 : T_x M \rightarrow T_x M$ , tal que  $\{v, Y_x^0 \cdot v\}$  define una base ortogonal de  $T_x M$  orientada positivamente. Consideremos la 2-forma  $\Omega_0$  en  $M$  dada por:

$$\Omega_0(x)(u, v) = g_x(Y_x^0 \cdot u, v) \quad (\text{forma de área}).$$

En este caso tenemos que  $\Omega^2(M)$  es un espacio vectorial sobre  $C^\infty(M)$  de dimensión 1. De este modo podemos identificar  $\Omega^2(M)$  con  $C^\infty(M)$ , asociando a cada  $f \in C^\infty(M)$  la 2-forma  $\Omega_f = f\Omega_0$ .

Por la definición de la fuerza de Lorentz, tenemos que  $Y(\Omega_f) = Y^f = fY^0$  y la forma simpléctica Twist definida por  $\Omega_f$  se escribe como:

$$\omega_f(\theta)(\xi, \eta) = \omega_0(\theta)(\xi, \eta) + (\pi^* \Omega_f)(\theta)(\xi, \eta) = \omega_0(\theta)(\xi, \eta) + f(x) g_x(Y^0 \cdot \xi_h, \eta_h).$$

Denotemos por  $X^f$  y  $\phi^f$  el campo y el flujo magnético asociados a la forma twist  $\omega_f$ , respectivamente. Entonces por (1) tenemos que las órbitas del flujo magnético están dadas por las soluciones de la ecuación:

$$\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = Y_\gamma^f \cdot \dot{\gamma} = f(\gamma) Y^0 \cdot \dot{\gamma}. \quad (1.10)$$

Para simplificar la notación vamos a seguir denotando por  $\phi_t^f$  la restricción del flujo magnético al nivel de energía  $T^cM$ . Vamos a probar dos propiedades del flujo magnético que nos serán de gran utilidad en los siguientes capítulos.

### 1.3. FLUJOS MAGÉTICOS EN UNA SUPERFICIE

**Lema 1.3.1.** Dados  $c > 0$  y  $\Omega = f\Omega_0 \in \Omega^2(M)$ , sea  $K = K(c, f) = \min\left\{\frac{1}{(\|f\|_{C^0} + 1)^2}, \frac{i(M, g)}{2c}\right\}$ . Entonces

$$\pi \circ \phi^f(\theta) : [0, K] \rightarrow M$$

es inyectiva, para todo  $\theta \in T^cM$ . En particular si  $\phi_t(\theta)$  es una órbita periódica en  $T^cM$ , con período minimal  $T$ , entonces  $T \geq K$ .

**Dem.:** Sean  $c > 0$  y  $f \in C^\infty(M)$  dados. Como  $\|X^f(\theta)_h\|^2 = \|v\|^2 \equiv 2c$  para todo  $\theta = (x, v) \in T^cM$ , tenemos que  $\pi \circ \phi^f : T^cM \times \mathbb{R} \rightarrow M$  es localmente inyectiva. Denotemos por  $i(M, g)$  el rayo de inyectividad de  $(M, g)$ . Supongamos que existe  $\theta = (x, v) \in T^cM$ , tal que  $x = \pi \circ \phi_T^f(\theta)$ , con  $T < \frac{i(M, g)}{2c}$ . Sea  $\gamma(t) = \pi \circ \phi_t^f(\theta)$  y consideremos la aplicación  $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $F(t) = d^2(x, \gamma(t))$ . Siendo  $\|\dot{\gamma}\|^2 \equiv c$  y  $T < \frac{i(M, g)}{2c}$  vale:

$$\max_{t \in [0, T]} F(t) < i(M, g).$$

De hecho, si esta desigualdad fuera falsa, existiría un tiempo  $t_0 \in (0, T)$ , tal que  $F(t_0) = i(M, g)$ , por lo tanto

$$i(M, g) = d^2(x, \gamma(t_0)) \leq \int_0^{t_0} g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt = 2ct_0 \Rightarrow t_0 \geq \frac{i(M, g)}{2c} > T.$$

Lo que contradice la elección de  $\theta$ .

Por lo tanto  $\gamma([0, T]) \subset \exp_x B_{i(M, g)}(0)$ , donde  $\exp_x T_x M \rightarrow M$  denota la aplicación exponencial geodésica usual. Sean  $c(t) := \exp_x^{-1}(\gamma(t))$  y  $V(t) := d_{c(t)} \exp_x \cdot c(t)$ . Entonces, por las propiedades de la exponencial, tenemos que  $F(t) = \|V(t)\|^2$ . Por lo tanto, si  $F(t_0) = \max_{t \in [0, T]} F(t)$ , entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} F(t_0) = 2g \left( \frac{D}{dt} \Big|_{t=t_0} V(t), V(t_0) \right) \quad y \\ 0 &> \frac{d^2}{dt^2} F(t_0) = 2 \left\| \frac{D}{dt} \Big|_{t=t_0} V(t) \right\|^2 + 2g \left( \frac{D^2}{dt^2} \Big|_{t=t_0} V(t), V(t_0) \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} V(t) &= \frac{D}{dt} \frac{d}{ds} \Big|_{s=1} \exp_x(sc(t)) = \frac{D}{ds} \Big|_{s=1} d_{sc(t)} \exp_x \cdot s\dot{c}(t) = \\ &= d_{c(t)} \exp_x \cdot \dot{c}(t) + \frac{D}{ds} \Big|_{s=1} d_{sc(t)} \exp_x \cdot \dot{c}(t) = \\ &= \dot{\gamma}(t) + \frac{D}{ds} \Big|_{s=1} d_{sc(t)} \exp_x \cdot \dot{c}(t). \end{aligned}$$

Por el Lema de Gauss [15, pg 89], vale que  $\exp_x^* g = dr^2 + h_{r,v}$ , donde  $h_{r,v}$  es una métrica en  $T_x^* M$ . Calculando el último término de la suma de arriba en el punto  $t = t_0$ , en el sistema de coordenadas locales polares de  $\exp_x(B_{i(M, g)}(0)) \in M$ , obtenemos que

$$\frac{D}{ds} \Big|_{s=1} d_{sc(t_0)} \exp_x \cdot \dot{c}(t_0) = 0.$$

pues la geodésica  $s \mapsto sc(t_0)$  es radial en  $\exp_x^{-1}(B_{i(M,g)}(0))$  y  $\dot{c}(t_0)$  es tangente a la esfera  $T_x^{F(t_0)}M$ . Por lo tanto substituyendo en (1.11), tenemos que:

$$0 > \frac{d^2}{dt}F(t_0) = 2\|\dot{\gamma}(t_0)\|^2 + 2g\left(\frac{D}{dt}\Big|_{t=t_0} \dot{\gamma}(t), V(t_0)\right).$$

Como

$$-\left\|\frac{D}{dt}\Big|_{t=t_0} \dot{\gamma}(t)\right\| \|V(t_0)\| \leq g\left(\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t), V(t_0)\right).$$

Usando la igualdad (1.10) y escribiendo  $a = (\|f(x)\|_{C^0} + 1)$ , la desigualdad arriba implica que

$$\frac{\sqrt{2c}}{a} < F(t_0)^{1/2} \leq \left(\int_0^{t_0} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt\right)^{1/2} = \sqrt{2ct_0}$$

lo que prueba el lema.  $\square$

Sea  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \phi_t(\theta)$ , la órbita por un punto  $\theta = (x, v) \in T^cM$ . Como  $M$  es bidimensional tenemos que  $\{\dot{\gamma}(t), Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)\}$  es una base ortogonal de  $T_{\gamma(t)}M$ . Usando esta base podemos probar el siguiente proposición:

**Proposición 1.3.2.** Sea  $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ , un campo de vectores sobre una geodésica magnética  $\gamma(t) = \pi \circ \phi_t^f(\theta)$  y sea  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo:

- (i)  $\frac{D^2}{dt^2}V(t) + R(\dot{\gamma}, V(t))\dot{\gamma} - (\nabla_{V(t)}f)Y^0 \cdot \dot{\gamma} - fY^0 \cdot \frac{D}{dt}V(t) = h(t)Y_{\gamma(t)}^0$
- (ii)  $(V(t), \frac{D}{dt}V(t)) \in T_{\phi_t^f(\theta)}T^cM, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Supongamos que

$$V(t) = x(t)\dot{\gamma}(t) + y(t)(Y_{\gamma(t)}^0 \cdot \dot{\gamma}(t)).$$

Entonces las funciones escalares  $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfacen las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = & fy \\ \dot{y} - \{-2cK_\gamma + g_\gamma(\nabla f, Y^0 \cdot \dot{\gamma}) - f^2\}y = & h(t) \end{cases} \quad (1.12)$$

donde  $K_\gamma(t)$  es la curvatura escalar de  $(M, g)$  sobre la curva  $\gamma$ .

Dem.: Inicialmente observemos que:

$$\frac{D}{dt}(Y^0 \cdot \dot{\gamma}) = (\nabla_{\dot{\gamma}}Y^0)\dot{\gamma} + Y^0 \cdot \frac{D}{dt}\dot{\gamma} = Y^0 \cdot fY^0 \cdot \dot{\gamma} = -f\dot{\gamma}$$

y usando la igualdad (1.10), obtenemos:

$$\frac{D}{dt}V = (\dot{x} - yf)\dot{\gamma} + (\dot{y} + xf)Y^0 \cdot \dot{\gamma} \quad (1.13)$$

$$\frac{D^2}{dt^2}V = (\ddot{x} - 2\dot{y}f - y\dot{f} - xf^2)\dot{\gamma} + (\ddot{y} + 2\dot{x}f + x\dot{f} - yf^2)Y^0 \cdot \dot{\gamma}. \quad (1.14)$$

Por otro lado, valen:

$$fY^0 \left(\frac{D}{dt}V\right) = (xf^2 - \dot{y}f)\dot{\gamma} + (f\dot{x} - yf^2)Y^0 \cdot \dot{\gamma} \quad (1.15)$$

$$(\nabla_V f)Y^0 \cdot \dot{\gamma} = \{x\nabla f(\dot{\gamma}) + y\nabla f(Y^0 \cdot \dot{\gamma})\}Y^0 \cdot \dot{\gamma}. \quad (1.16)$$

Calculando la componente en la dirección de  $\dot{\gamma}$  de la ecuación (i), obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(\frac{D^2}{dt^2}V, \dot{\gamma}\right) + g(R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - g((\nabla_V f)Y^0 \cdot \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - \\ &- g\left(fY^0 \cdot \left(\frac{D}{dt}V\right), \dot{\gamma}\right) = g\left(\frac{D^2}{dt^2}V, \dot{\gamma}\right) - g\left(fY^0 \cdot \left(\frac{D}{dt}V\right), \dot{\gamma}\right) \end{aligned}$$

y usando las igualdades (1.13), (1.14), (1.15) y (1.16), obtenemos:

$$\ddot{x} = \dot{y}f + y\dot{f} = \frac{d}{dt}(yf).$$

Calculando la componente en la dirección de  $(Y^0 \cdot \dot{\gamma})$  y nuevamente haciendo uso de (1.13), (1.14), (1.15) y (1.16), tenemos:

$$\dot{y} + \{-2cK_\gamma - g(\nabla f, Y^0 \cdot \dot{\gamma})\}y = h - \dot{x}f.$$

donde:

$$K_\gamma(t) = \frac{g(R(\dot{\gamma}(t), Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \wedge Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)|^2} = \frac{1}{2c}g(R(\dot{\gamma}(t), Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)).$$

Por (ii), y la igualdad (1.4) vale:

$$0 \equiv dE\left((V(t), \frac{D}{dt}V(t))\right) = g\left(\dot{\gamma}, \frac{D}{dt}V\right) = \dot{x} - yf.$$

Esto implica que  $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = & fy \\ \dot{y} - \{-2cK_\gamma + g_\gamma(\nabla f, Y^0 \cdot \dot{\gamma}) - f^2\}y = & h \end{cases}$$

$\square$

## Capítulo 2

# Kupka-Smale para flujos magnéticos en superficies

En este capítulo vamos a probar los Teoremas A y C.

### 2.1. Propiedad genérica de las geodésicas magnéticas cerradas

Sea  $(M, g)$  una superficie cerrada y orientable. Denotemos por  $\Omega_0$  la forma de área en  $M$  inducida por la métrica  $g$ . Siendo  $\dim(M) = 2$ , tenemos que toda 2-forma en  $M$  es cerrada y el conjunto  $\Omega^2(M)$  es un espacio vectorial sobre  $C^\infty(M)$  de dimensión 1. De este modo podemos identificar  $\Omega^2(M)$  con  $C^\infty(M)$ , asociando a cada  $f \in C^\infty(M)$  la 2-forma  $\Omega_f = f\Omega_0$ .

Por la definición de la fuerza de Lorentz, tenemos  $Y(\Omega_f) = fY^0$ , donde  $Y_x^0 : T_xM \rightarrow T_xM$  es la única aplicación lineal que satisface:

$$\Omega_0(x)(u, v) = g_x(Y_x^0 \cdot u, v), \quad \forall u, v \in T_xM \text{ y } \forall x \in M.$$

Luego la forma simpléctica Twist definida por  $\Omega_f$  se escribe como:

$$\omega_f = \omega(f\Omega_0) = \omega_0 + \pi^*(f\Omega_0) = \omega_0 + (f \circ \pi) \cdot (\pi^*\Omega_0)$$

Denotemos por  $X^f$  y  $\phi^f$  el campo y el flujo magnético asociados a la 2-forma  $\Omega_f$ , respectivamente. Recordemos que por (1), las órbitas del flujo magnético están dadas por la solución de la ecuación:

$$\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = f(\gamma) Y^0 \cdot \dot{\gamma}. \quad (2.1)$$

Observemos que para todo  $c > 0$ , la igualdad 2.1 implica que la restricción del flujo magnético al nivel de energía  $T^cM = E^{-1}\{c\}$  no posee puntos fijos.

Para simplificar la notación vamos a seguir denotando por  $\phi^f$  la restricción del flujo magnético a un nivel de energía positivo  $T^cM = E^{-1}(c)$ .

Sea  $\Omega = f\Omega_0 \in \Omega^2(M)$  y supongamos que  $\theta_t = \phi^f(\theta) : [0, T] \rightarrow TM$  es una órbita periódica de período  $T > 0$ . Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie local contenida en el nivel de energía  $T^cM = E^{-1}(E(\theta)) \subset TM$ , transversal al flujo en el punto  $\theta_0 = \theta$ . La aplicación de Poincaré del flujo de una vecindad  $\theta \in U_\theta \subset \Sigma$ , en  $\Sigma$  está dada por:

$$P(\Sigma, f) : \Sigma \supset U_\theta \longrightarrow \Sigma$$

$$u \longmapsto \phi_{\tau(u)}^f(u)$$

donde  $\tau : U_\theta \rightarrow \mathbb{R}$  es el tiempo del primer retorno de la órbita  $\phi_t(u)^f$  en  $\Sigma$ .

Un hecho bien conocido de sistemas hamiltonianos es que la estructura simpléctica (en este caso la forma Twist  $\omega_f$ ) induce una estructura simpléctica en una vecindad de  $\theta$  en  $\Sigma$  y la aplicación de Poincaré correspondiente  $P(\Sigma, f)$  es un simplectomorfismo ( cf. [31, pg. 265]). Usando un sistema de coordenadas de Darboux, podemos suponer que  $\Sigma$  es una vecindad de 0 en  $\mathbb{R}^2$ , la forma twist en  $\Sigma$  es la forma de área en  $\mathbb{R}^2$  y que  $P(0) = 0$ . Luego, si  $\lambda_1, \lambda_2$  son los autovalores de la aplicación de Poincaré linealizada, entonces necesariamente satisfacen  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ . Por lo tanto la propiedad de que  $dP$  tenga un autovalor complejo de norma uno es una propiedad abierta.

Decimos que una órbita periódica  $\theta_t$  de período  $T > 0$  es *no-degenerada* si la aplicación de Poincaré linealizada  $d_{\theta_0}P$  no posee autovalor igual a 1. El siguiente teorema es una extensión del Teorema de las Métricas Bumpy ( atribuido a R. Abraham [1] y también probado por Anosov en [4] ) a los flujos magnéticos en superficies.

**Teorema A.** *La Propiedad  $P_1$  : Todas las órbitas periódicas son no-degeneradas, es  $C^r$ -genérica para los flujos magnéticos en una superficie cerrada y orientable, con  $1 \leq r \leq \infty$ .*

Este Teorema claramente implica que:

**Corolario 2.1.1.** *Dado  $T > 0$ , entonces,  $C^r$ -genéricamente, el número de órbitas periódicas de periodo menores que  $T$  es finito.*

### 2.1.1.1. Perturbación local del flujo magnético.

En esta sección vamos a probar un Teorema de perturbación local para la derivada de la aplicación de Poicaré sobre una órbita periódica fija.

Sea  $\Omega = f\Omega_0 \in \Omega^2(M)$  y sea  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \phi_t^f(\theta)$  la órbita del punto  $\theta = (x, v) \in T^cM$ , con  $c > 0$ . Dado  $\xi \in T_\theta T^cM$  definimos el Campo de Jacobi  $J_\xi$  como el campo de vectores a lo largo de la geodésica magnética  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ , dado por:

$$J_\xi(t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \pi \circ \phi_t^f(z(s))$$

### 2.1. PROP. GENÉRICA DE LAS GEODÉSICAS MAGNÉTICAS CERRADAS 21

donde  $z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T^cM$  es una curva adaptada a  $\xi$ . Por (1.8), el campo de Jacobi  $J_\xi$  satisface:

$$\frac{D^2}{dt^2} J_\xi + R(\dot{\gamma}, J_\xi)\dot{\gamma} - (\nabla_{J_\xi} f) Y^0 \cdot \dot{\gamma} - f Y^0 \cdot \frac{D}{dt} J_\xi = 0. \quad (2.2)$$

Además, si  $\xi \in T_\theta T^cM \subset T_\theta TM$ , tenemos que  $(J_\xi(t), \frac{D}{dt} J_\xi(t)) \in T_{\phi_t(\theta)} T^cM$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por la proposición 1.3.2, escribiendo

$$J_\xi(t) = x(t)\dot{\gamma}(t) + y(t)(Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)),$$

tenemos que  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = fy \\ \dot{y} = \{-2cK_\gamma + g(\nabla f, Y^0 \cdot \dot{\gamma}) - f^2\}y \end{cases} \quad (2.3)$$

Sea  $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(\phi_t^f(\theta)) \subset T_\theta T^cM$ , definido como:

$$\mathcal{N}(t) = \{\xi \in T_{\phi_t^f(\theta)} T^cM; g_{\gamma(t)}(d\pi(\xi), \dot{\gamma}(t)) = 0\}.$$

Siendo  $d_\theta \pi(X^f(\phi_t^f(\theta))) = \dot{\gamma}(t)$  (1.5), tenemos que  $\mathcal{N}(t)$  es transversal al campo  $X^f$  a lo largo de la órbita del punto  $\theta$ . Luego

$$T_{\phi_t^f(\theta)} T^cM = \mathcal{N}(t) \oplus \langle X^f(\phi_t^f(\theta)) \rangle.$$

Por lo tanto, la restricción de la forma simpléctica Twist  $\omega_f(\theta)$  en  $\mathcal{N}(\theta)$  es no-degenerada. Note que  $\mathcal{N}(\theta)$  no depende de la 2-forma  $f\Omega_0$ .

Consideremos los campos de vectores ( L.I )  $e_1(t)$  y  $e_2(t)$  a lo largo de  $\phi_t^f(\theta)$  definidos por:

$$\begin{cases} e_1(t) = (Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t), 0) \\ e_2(t) = (0, Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)) \end{cases} \in H(\phi_t^f(\theta)) \oplus V(\phi_t^f(\theta)). \quad (2.4)$$

Por la igualdad (1.4) y la definición de  $\mathcal{N}(t)$ , tenemos que  $e_1(t), e_2(t) \in \mathcal{N}(t)$ , y además,

$$\omega_f(\phi_t^f(\theta))(e_1(t), e_2(t)) = g(Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t), Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)) = 2c \neq 0,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Usando las igualdades (1.9), (1.13) y (2.3), obtenemos que si  $\xi = \xi_1 e_1(0) + \xi_2 e_2(0) \in T_\theta T^cM$ , entonces:

$$\begin{aligned} d\phi_t^f(\theta)(\xi) &= (J_\xi(t), \frac{D}{dt} J_\xi(t)) = \\ &= ((x(t)\dot{\gamma}(t) + y(t)Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)), (\dot{y}(t) + x(t)f)Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)) \\ &= x(t)X^f(t) + y(t)e_1(t) + \dot{y}(t)e_2(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son las soluciones de ( 2.3) con las condiciones iniciales:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = \xi_1 \quad \text{y} \quad \dot{y}(0) = \xi_2.$$

Por otro lado, eligiendo una familia a un parámetro de secciones transversales  $\Sigma_t \in T^c M$ , tales que  $T_{\phi_t^f(\theta)} \Sigma_t = \mathcal{N}(t)$  y denotando  $P_t(f) : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_t$  la aplicación de Poincaré correspondiente, vale:

$$d\phi_t^f(\theta) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & d_\theta P_t(f) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Iguálándolo (2.5) y (2.6) concluimos que  $d_\theta P_t(f) : \mathcal{N}(0) \rightarrow \mathcal{N}(t)$  es una matriz fundamental de la ecuación

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K_{\text{mag}}(f)(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

donde  $K_{\text{mag}}(f)(t) := 2eK_{\gamma(t)} - g_{\gamma(t)}(\nabla f, Y^0 \cdot \dot{\gamma}) + f^2(\gamma(t))$ .

Vamos ahora a definir nuestro espacio de perturbación.

Sea  $K = K(f, c)$  dado por el lemma 1.3.1. Para cada  $\frac{K}{2} < T < K$  y cada abierto  $W \subset M$ , con  $W \cap \gamma((\frac{K}{2}, T)) \neq \emptyset$ , definimos el conjunto:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(W, \gamma, f, T) = \left\{ h \in C^\infty(M); h|_{\gamma([0, T])} \equiv 0, \text{supp } h \subset W \text{ y } [\Omega_h] = 0 \in H^2(M, \mathbb{R}) \right\}.$$

Por construcción, tenemos que si  $h \in \mathcal{F}$ , entonces la curva  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  satisface:

$$\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t) = (f+h)(\gamma(t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t), \quad \forall t \in (0, T).$$

Por lo tanto  $[0, T] \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  es un segmento de órbita del flujo magnético perturbado  $\phi_t^{f+h}$ . Entonces, podemos definir la aplicación:

$$S_{T, \theta} : \mathcal{F} \rightarrow Sp(1) \\ h \mapsto d_\theta P(f+h). \quad (2.8)$$

De este modo, podemos enunciar nuestro teorema de perturbación local como:

**Teorema 2.1.2.** *Dados  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\frac{K(f, c)}{2} < T < K(f, c) = K$  y  $U$  una vecindad de  $f$  en la topología  $C^k$  ( $1 \leq k$ ). Entonces, para cada  $\theta \in T^c M$  y  $W$  como arriba, la imagen de  $\{f - U\} \cap \mathcal{F}$  por la aplicación  $S_{T, \theta}$  es una vecindad abierta de  $S_{T, \theta}(0) = d_\theta P(f)$  en  $Sp(1)$ .*

Supongamos que  $\phi_t^f(\theta) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  es una órbita periódica de período minimal  $T > 0$ . Entonces por el lema 1.3.1 tenemos que  $K(f, c) < T$  y además los puntos de autointersección de la geodésica magnética cerrada  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  son a lo más un número finito. De este modo, fijando  $t_0 \in (\frac{K}{2}, K]$ , tal que  $T = nt_0$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , y denotando  $\gamma_i(t) = \gamma(t + it_0)$ , podemos elegir abiertos disjuntos  $W_i \subset M$ , con  $0 \leq i \leq (n-1)$ , tales que:

$$W_i \cap \gamma_i|_{(\frac{K}{2}, t_0)} \neq \emptyset \text{ y } W_i \cap \gamma_j = \emptyset, \quad \forall j \neq i. \quad (2.9)$$

Sea  $W = \cup_i W_i$ . Definimos la aplicación

$$S_\theta : \mathcal{F}(W, \gamma, f, c, T) \rightarrow \prod_{i=0}^{n-1} Sp(1) \\ h \mapsto d_\theta P(f+h) = \prod_{i=0}^{n-1} d_{\phi_{it_0}^f(\theta)} P_i(f+h)$$

donde  $P_i$  es la aplicación de Poincaré de la sección  $\Sigma_{it_0}$  en  $\Sigma_{(i+1)t_0}$ . Aplicando  $n$ -veces el Teorema 2.1.2 se prueba que:

**Corolario 2.1.3.** *Dados  $f \in C^\infty(M)$  y una vecindad  $U$  de  $f$ , en la topología  $C^r$  con  $r \geq 1$ . Supongamos que  $\phi_t^f(\theta) \subset T^c M$  es una órbita periódica de período minimal  $T$ . Entonces eligiendo  $t_0, n$  y  $W$  como arriba, la imagen de  $\{f - U\} \cap \mathcal{F}$  por la aplicación  $S_\theta$  es una vecindad abierta de  $S_\theta(0)$  en  $\prod_{i=0}^{n-1} Sp(1)$ .  $\square$*

### Prueba del teorema 2.1.2

Vamos a probar que  $S_{T, \theta}$  restringida a un subconjunto apropiado  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ , es una inmersión local en 0.

Para cada  $\theta \in T^c M$ , como  $T < K(f, c)$ , por el lema 1.3.1, podemos elegir un sistema de coordenadas locales  $\psi : (0, T) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow W \subset M$ , tal que:

- $\psi(t, 0) = \gamma(t)$  y
- $\left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\}_{\gamma(t)} = \{ \dot{\gamma}(t), Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t) \} \subset T_{\gamma(t)} M, \quad \forall t \in (0, T)$ .

Definimos el subconjunto  $\overline{\mathcal{F}} \subset C^\infty(M)$  de las funciones  $h \in C^\infty(M)$ , tales que  $\text{Supp}(h) \subset W$  y  $\bar{h} = h \circ \psi : (0, T) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  satisface:

- (i)  $\bar{h}(t, x) = a(x)b(t)$ ,
- (ii)  $a(0) = 0$  y  $\left. \frac{d}{dx} \right|_{x=0} a(x) = 1$
- (iii)  $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} a(x) dx = 0$

Por construcción, tenemos que  $h(t, 0) \equiv 0$  y además, si  $\eta$  es una 1-forma en  $M$  con soporte en  $W$ , tal que

$$\eta|_W = \left( - \int_{-\epsilon}^x a(s)b(t) ds \right) \wedge dt,$$

entonces  $d\eta = h\Omega_0$ . Luego  $h \in \mathcal{F}$ .

**Lema 2.1.4.** *Consideremos un parámetro  $s$  arbitrariamente cercano a cero. Sea  $h^s(t, x) = a(x)b^s(t) \in \overline{\mathcal{F}}$ , tal que  $b^{s=0} \equiv 0$ . Entonces*

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} S_{T, \theta}(h^s) = X(T) \int_0^T \left( \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} b^s(t) \right) X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) dt$$

donde  $X(t)$  es una matriz fundamental de la ecuación (2.7).

Dem.: Observemos que:

$$\begin{aligned} K_{\text{mag}}(f+h^s)(t) &= K_{\text{mag}}(f)(t) - g_{\gamma}(\nabla h^s, Y^0 \cdot \dot{\gamma}) = \\ &= K_{\text{mag}}(f)(t) - \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=0} h^s(\gamma(t)) = \\ &= K_{\text{mag}}(f) - b^s(t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

Vamos a denotar  $X_h(s, T) := d_{\theta} P_T(f+h^s)$ . Por (2.7),  $X_h(s, T)$  es una matriz fundamental, en el tiempo  $t = T$ , de la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} X_h(s, t) = A^s(t) \cdot X_h(s, t) \quad (2.11)$$

$$\text{donde } A^s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_{\text{mag}}(f+h^s) & 0 \end{bmatrix} = A^0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b^s(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Definimos

$$Z_h(T) := \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d_{\theta} P_T(f+h^s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} X_h(s, T).$$

Usando que  $X_h(s, t)$  satisface la ecuación (2.11), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Z_h(t) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} X_h(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} X_h(s, t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (A^s(t) \cdot X_h(s, t)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left\{ \left( A^0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b^s(t) & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot X_h(s, t) \right\} = \\ &= A^0 Z_h(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} b^s(t) & 0 \end{bmatrix} X^0(t), \end{aligned}$$

con  $X^0(t) = X_h(0, t)$ . Ya que  $Z_h(0) = 0$ , aplicando la fórmula de la variación de parámetros (vea por ejemplo [16, pg. 48]), obtenemos la igualdad:

$$Z_h(T) = X^0(T) \int_0^T (X^0(t))^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} b^s(t) & 0 \end{bmatrix} X^0(t) dt. \quad (2.12)$$

Lo que prueba el lema. □

Denotemos por  $\mathfrak{sp}(1)$  la álgebra de Lie del grupo de Lie clásico  $Sp(1) = SL(2)$ , esto es:

$$\mathfrak{sp}(1) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}); \text{Traza}(A) = 0\}.$$

Sea  $t_0 \in (0, T)$  fijo. Para cada matriz  $A = \begin{bmatrix} b & c \\ a & -b \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(1)$ , y  $0 < \lambda \ll 1$  suficientemente chico, tal que  $\gamma([t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]) \subset W$ , definimos la función  $b_A = b(\lambda, A, t_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$b_A(t) = \delta_{\lambda}(t)a + \delta'_{\lambda}(t)b - \left( \delta_{\lambda}(t)K_{\text{mag}}(f)(t) + \frac{1}{2}\delta''_{\lambda}(t) \right) c,$$

donde  $\delta_{\lambda}$  es una aproximación  $C^{\infty}$  de la función Delta de Dirac en un punto  $t_0$ , con soporte en el intervalo  $[t_0 - \lambda, t_0 + \lambda]$ .

Aplicando el lema 2.1.4 a la variación  $h^s(A, x, t) = a(x) + s b_A(x, t) \in \overline{\mathcal{F}}$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} Z_A(T) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} S_{T, \theta}(f+h^s) = \\ &= X(T) \left\{ \int_0^T \delta_{\lambda}(t) (a - c K_{\text{mag}}(f)) X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \delta'_{\lambda}(t) b X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \delta''_{\lambda}(t) c X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Integrando por partes en los términos segundo y tercero, y usando que  $X(t)$  solución de la ecuación (2.7), tenemos que

$$Z_A(T) = Z_{A, \lambda}(T) = X(T) \int_0^T \delta_{\lambda}(t) X^{-1}(t) \begin{bmatrix} b & c \\ a & -b \end{bmatrix} X(t) dt.$$

Es fácil ver que para  $\lambda$  suficientemente chico, la aplicación

$$\mathfrak{sp}(1) \ni A \mapsto \int_0^T \delta_{\lambda}(t) X^{-1}(t) \begin{bmatrix} b & c \\ a & -b \end{bmatrix} X(t) dt = X^{-1}(T) Z_A(T) \in \mathfrak{sp}(1)$$

es un isomorfismo.

Recordemos que

$$T_{S_{T, \theta}(0)}(Sp(1)) = X(T) \cdot [T_{Id}(Sp(1))] = X(T) \cdot \mathfrak{sp}(1).$$

Luego la aplicación  $\mathfrak{sp}(1) \ni A \mapsto Z_A \in T_{S_{T, \theta}(0)}(Sp(1))$  también es un isomorfismo.

Por lo tanto, si

$$A = \{h(A, t, x) = a(x)b_A(t) \in \overline{\mathcal{F}}; A \in \mathfrak{sp}(1)\} \approx \mathbb{R}^3,$$

entonces

$$d_0(S_{T, \theta}) : T_0 A \longrightarrow T_{S_{T, \theta}(0)} Sp(1)$$

es un isomorfismo, lo que prueba el teorema 2.1.2.

## 2.1.2. Prueba del Teorema A

Recordemos que una órbita periódica de período  $T$  es *no-degenerada de orden  $n$* , con  $n \in \mathbb{N}$ , cuando la derivada de la aplicación de Poincaré no posee autovalores que son raíces  $n$ -ésima de la unidad. Dados  $a, c > 0$  y  $m \in \mathbb{N}$  definimos el conjunto:

$$G^m(c, a) = \{f \in C^\infty(M) \ ; \ \text{todas las órbitas periódicas de } \phi^f|_{T^c M} \text{ con período minimal } < a \in \mathbb{R}^+, \text{ son no-degeneradas de orden } m\}$$

y siendo que

$$\mathcal{O}_{P_1}(c) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G^1(c, n)$$

el Teorema A se reduce a la siguiente Proposición:

**Proposición B.** *Dados  $c, a > 0$  y  $r \in \mathbb{N}$  el subconjunto  $G^1(c, a) \subset \Omega^2(M)$  es abierto en la topología  $C^r$ . Además, para toda clase de cohomología  $h \in H^2(M, \mathbb{R})$ , el subconjunto*

$$G_h^1(c, a) = G^1(c, a) \cap \{f \in C^\infty(M); [\Omega_f] = h\}$$

es  $C^r$ -denso en  $\{f \in C^\infty(M); [\Omega_f] = h\}$ .

Para probar esta proposición usaremos los siguientes lemas:

**Lema 2.1.5.** *Dados  $c > 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$  y  $f \in C^\infty(M)$ . Existe una  $C^r$ -vecindad abierta  $U_f \subset C^\infty(M)$  de  $f$ , tal que*

$$U_f \cap G^m(c, K) = U_f,$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ , donde  $K = K(c, f)$  esta dado por el lema 1.3.1.

**Dem.:** Por la definición de  $K(f, c)$  en la demostración del lema 1.3.1, basta tomar

$$U_f = \{h \in C^\infty(M); \max_{x \in M} |h(x)| < \max_{x \in M} |f(x)| + 1 = a\},$$

de este modo tenemos que  $K(h, c) > K(f, c)$ ,  $\forall h \in U_f$ . Por lo tanto la curva

$$\pi \circ \phi^h(\theta) : [0, K(f, c)] \rightarrow M$$

es inyectiva para todo  $\theta \in T^c M$ . En particular  $\phi_t^h$  no posee órbitas periódicas de período menor  $K(c, f)$ , para toda  $h \in U_f$ , lo que prueba el lema.  $\square$

**Lema 2.1.6.** *Sea  $f \in C^\infty(M)$  y supongamos que  $\phi_T^f(\theta)$  es una órbita periódica de período minimal  $T > 0$ , en el nivel de energía  $T^c M$ . Entonces existen  $h_1, h_2 \in C^\infty(M)$ , con  $[\Omega_{h_1}] = [\Omega_{h_2}] = 0 \in H^2(M, \mathbb{R})$ , tales que los vectores:*

$$Z_i = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\phi_T^{f+sh_i}(\theta)), \quad i = \{1, 2\}$$

generan un subespacio complementario a  $X^f(\theta)$  en  $T_\theta T^c M$ .

**Dem.:** Sea  $\gamma = \pi \circ \phi_t^f(\theta)$ , para cada  $h \in C^\infty(M)$  fijo, definimos

$$\gamma_h(s, t) = \pi \circ \phi_t^{f+sh}(\theta).$$

Sea  $V_h(t)$  el campo de vectores a lo largo de la geodésica magnética  $\gamma(t) = \gamma_h(0, t)$  dado por:

$$V_h(t) := \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_h(s, t).$$

Entonces

$$Z_h(t) := \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \phi_t^{f+sh}(\theta) = (V(t), \frac{D}{dt} V(t)) \in H(\phi_t^f(\theta)) \oplus V(\phi_t^f(\theta)). \quad (2.13)$$

De hecho, por la definición de  $\gamma_h$  tenemos:

$$\begin{cases} V_h(t) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\pi \circ \phi_t^{f+sh}(\theta)) = d_{\phi_t^f(\theta)} \pi \circ \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \phi_t^{f+sh}(\theta) = \\ &= d_{\phi_t^f(\theta)} \pi(Z_h(t)) \\ \frac{D}{dt} V(t) &= \frac{D}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_h(s, t) \right) = \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \dot{\gamma}_h(s, t) = \\ &= \nabla_{\left( \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \gamma_h(s, t) \right)} \dot{\gamma}_h(0, t) = K_{\phi_t^f(\theta)}(Z_h(t)) \end{cases}$$

lo que prueba la igualdad (2.13).

Siendo que el nivel de energía no depende del campo magnético (sólo depende de  $\theta$ ), tenemos que el campo de vectores  $Z_h(t)$  es tangente al nivel de energía  $T^c M$ , con  $c = E(\theta)$ . Luego  $Z_h(t)$  satisface la condición (ii) de la prop. 1.3.2. Además, siendo que para cada  $s$  fijo, la curva  $\gamma_h(s, t)$  es una geodésica magnética para la 2-forma  $(f + sh)\Omega_0$ , vale:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \dot{\gamma}_h(s, t) &= \{f(\gamma_h(s, t)) + s h(\gamma_h(s, t))\} Y^0 \cdot \dot{\gamma}_h(s, t) = \\ &= f(\gamma_h(s, t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}_h(s, t) + s h(\gamma_h(s, t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}_h(s, t). \end{aligned}$$

Derivando de ambos los lados en relación a  $s$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \frac{D}{dt} \dot{\gamma}_h(s, t) &= \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \left( f(\gamma_h(s, t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}_h(s, t) \right) + \\ &+ \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \left( s h(\gamma_h(s, t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}_h(s, t) \right) = \\ &= \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \left( f(\gamma_h(s, t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}_h(s, t) \right) + h(\gamma_h(0, t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}_h(0, t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de modo análogo a (1.6) y (1.7), tenemos que  $V_h$  satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{dt^2} V_h + R(\dot{\gamma}, V_h) \dot{\gamma} &= (\nabla_{V_h} (f Y^0)) \cdot \dot{\gamma} + f Y^0 \cdot \frac{D}{dt} V_h + h Y^0 \cdot \dot{\gamma} = \\ &= (\nabla_{V_h} f) Y^0 \cdot \dot{\gamma} + f Y^0 \cdot \frac{D}{dt} V_h + h Y^0 \cdot \dot{\gamma}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que  $\nabla Y^0 = 0$ . Luego el campo  $V_h$  satisface las condiciones de la prop. 1.3.2. Por lo tanto escribiendo

$$V_h(t) = x(t)\dot{\gamma}(t) + y(t)Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)$$

y observando que  $V_h(0) = 0$ , tenemos que  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la única solución de la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = & fy \\ \dot{y} = & \{-2cK_\gamma + \nabla f(Y^0 \cdot \dot{\gamma}) - f^2(\gamma(t))\} y = h(\gamma(t)) \end{cases}, \quad (2.14)$$

con las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$ .

Utilizando nuevamente el subhaz  $\mathcal{N}(t)$  y los campos de vectores  $e_1(t), e_2(t) \in \mathcal{N}(t)$  definidos como en 2.4, por la igualdad (1.13) y las ecuaciones (2.14), tenemos que:

$$\begin{aligned} Z_h(t) &= \left( V_h(t), \frac{D}{dt} V_h(t) \right) = \\ &= (x(t)\dot{\gamma}(t) + y(t)Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t), (\dot{y}(t) + x(t)f(t))Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)) = \\ &= x(t)X^f(t) + y(t)e_1(t) + \dot{y}(t)e_2(t). \end{aligned}$$

Denotemos

$$\Lambda : T_\theta T^c M = \mathcal{N}(\theta) \oplus \langle X^f(\theta) \rangle \longrightarrow \mathcal{N}(\theta)$$

la proyección canónica. Para concluir la demostración basta ver que la aplicación

$$\{h \in C^\infty(M); [\Omega_h] = 0\} \ni h \longmapsto \Lambda(Z_h(T)) \in \mathcal{N}(\theta)$$

es sobreyectiva.

De hecho, por construcción  $\Lambda(Z_h(T)) = y(T)e_1(T) + \dot{y}(T)e_2(T) = y(T)e_1(0) + \dot{y}(T)e_2(0)$  donde  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la única solución de

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_{\text{mag}}(f) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(\gamma) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

con  $(y(0), \dot{y}(0)) = (0, 0)$ . Luego, si  $A(t)$  es una matriz fundamental de la parte homogénea de la ecuación (2.15), aplicando la fórmula de la variación de parámetro obtenemos que

$$\Lambda(Z_h(T)) = A(T) \int_0^T A(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h(\gamma(t)) \end{pmatrix} dt \quad (2.16)$$

Fijemos un punto  $t_0 \in (0, T)$  y  $0 < \epsilon < T - t_0$  suficientemente chico, tal que el segmento  $\gamma([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon])$  no contiene puntos de autointersección de la geodésica magnética  $\gamma$ . Sea  $\delta_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una aproximación de clase  $C^\infty$  de la función Delta de Dirac en el punto  $t_0$ , con  $0 < \lambda \ll \epsilon$ . Usando un sistema de coordenadas locales tubulares  $W$  para el segmento

$\gamma([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon])$ , con  $W \cap \gamma = \gamma([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon])$ , podemos fácilmente elegir funciones  $h_i \in C^\infty(M)$ , con  $\text{Supp}(h_i) \subset W$  y  $[h_i \Omega_0] = 0 \in H^2(M, \mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ , tales que:

$$h_1(\gamma(t)) = \delta_\lambda(t) \quad y \quad h_2(\gamma(t)) = \delta'_\lambda(t).$$

Luego, por la igualdad (2.16), valen:

$$\begin{aligned} \Lambda(Z_{h_1}(T)) &= A(T) \int_0^T \delta_\lambda(t) A(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt, \quad y \\ \Lambda(Z_{h_2}(T)) &= A(T) \int_0^T \delta'_\lambda(t) A(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Siendo que

$$\frac{d}{dt} \left( A(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -A(t)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_{\text{mag}}(f) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -A(t)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

haciendo integración por partes en (2.17), obtenemos:

$$\Lambda(Z_{h_2}(T)) = A(T) \int_0^T \delta_\lambda(t) A(t)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

Por lo tanto, disminuyendo  $\lambda$  si es necesario, tenemos que los vectores  $\{\Lambda(Z_{h_i}(T))\}_{i=1,2}$  son linealmente independientes, lo que prueba el lema.  $\square$

El siguiente lema es una consecuencia del lema anterior

**Lema 2.1.7.** Sean  $\Omega_{f_0} = f_0 \Omega_0$  una 2-forma en  $M$  y  $\theta_0 \in T^c M$ , tales que  $\phi_t^{f_0}(\theta_0)$  es una órbita periódica de período minimal  $t_0 > 0$ . Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \text{ev} : T^c M \times \mathbb{R} \times \mathcal{A} &\rightarrow T^c M \times T^c M \supset \Delta \\ (\theta, t, f) &\mapsto \text{ev}(f) = (\theta, \phi_t^f(\theta)) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{A} = \{f \in C^\infty(M); [\Omega_f] = [\Omega_{f_0}]\}$ , es transversal a la diagonal  $\Delta \subset T^c M \times T^c M$  en el punto  $(\theta_0, t_0, f_0)$ .

**Dem.:** Por hipótesis, tenemos que  $\text{ev}(\theta_0, t_0, f_0) \in \Delta$ . Identificando  $T_{(\theta_0, t_0, f_0)}(T^c M \times \mathbb{R} \times \mathcal{A})$  con  $T_{\theta_0} T^c M \times \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ , de las propiedades de las derivadas parciales, vale:

$$\begin{aligned} d_{(\theta_0, t_0, f_0)} \text{ev} \cdot (\xi, x, h) &= \left( \xi, d_{(\theta_0, t_0)} \phi^{f_0} \cdot (\xi, x) \right) + \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \text{ev}(\theta_0, t_0, f_0 + sh) = \\ &= \left( \xi, d_{\theta_0} \phi_{t_0}^{f_0} \cdot \xi + x X(\theta_0) \right) + \left( 0, \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \phi_{t_0}^{f_0 + sh}(\theta_0) \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto si  $\phi_{t_0}^{f_0}(\theta_0)$  es no-degenerada ( con período  $t_0$  ), por la observación hecha en 1.1, tenemos que el primer término de la derivada anterior, genera todo el subespacio complementario de  $T_{(\theta_0, \theta_0)}\Delta \subset T_{\theta_0}T^cM \times T_{\theta_0}T^cM$ , luego  $ev \bar{\cap}_{(\theta_0, t_0, f_0)}\Delta$ . Supongamos que  $\phi_{t_0}^{f_0}(\theta_0)$  es degenerada. Ya que  $\{0\} \times T_{\theta_0}T^cM$  es un complemento de  $T_{(\theta_0, \theta_0)}\Delta$  en  $T_{\theta_0}T^cM \times T_{\theta_0}T^cM$ , la conclusión del lema se sigue directamente del lema 2.1.6.  $\square$

**Lema 2.1.8.** *Dados  $a > 0$  y  $m \in \mathbb{N}$ , si  $f \in G^1(c, a)$  entonces existe  $h \in C^\infty(M)$  arbitrariamente  $C^k$ -cercana a  $f$  con  $[\Omega_h] = [\Omega_f] \in H^2(M, \mathbb{R})$ , tal que  $h \in G^m(c, a)$ .*

**Dem.:** Ya que  $f \in G^1(c, a)$ , entonces  $ev(f) \bar{\cap}_{T^cM \times [0, a]}\Delta$ . Siendo  $T^cM \times [0, a]$  compacto, de la teoría básica de transversalidad, concluimos que el flujo  $\phi^f$  posee a lo más un número finito de órbitas periódicas de período menor que  $a$ . Sean  $\eta_1, \dots, \eta_j$  tales órbitas periódicas y  $t_1, \dots, t_j$  sus respectivos períodos minimales.

Siendo que los autovalores de la aplicación de primer retorno de Poincaré no dependen de la elección de la sección transversal, podemos elegir las secciones transversales  $\Sigma_i$  en los puntos  $\eta_i(0)$ ,  $1 \leq i \leq j$ , como en el Teorema 2.1.2, y abiertos,  $W_i^i \subset M$ , tales que, para cada  $i$  fijo  $W_i^i$  satisface (2.9) y además  $\{W_i = \cup_l W_l^i\} \cap \{W_j = \cup_l W_l^j\} = \emptyset$  ( $W_j^i$  no contiene puntos de intersecciones de las curvas  $\pi \circ \eta_i$ ). Aplicando el Corolario 2.1.3 tenemos que las aplicaciones

$$S_i : \mathcal{F}(W_i, c, f) \ni h \mapsto d_\theta P_i(f + h, \Sigma_i) \in Sp(1)$$

son abiertas, para todo  $1 \leq i \leq j$ .

Por lo tanto, dado  $m \in \mathbb{N}$ , para toda  $C^r$ -vecindad  $V_f \subset C^\infty(M)$  de  $f$ , tenemos que los subconjuntos  $S_i(\{f - V_h\} \cap \mathcal{F}(W_i, c, f)) \subset Sp(1)$  son vecindades abiertas de  $d_\theta P_i(f, \Sigma_i)$ ,  $i = \{1, \dots, j\}$ . Luego, para cada  $1 \leq i \leq j$ , existe una transformación lineal  $B_i \in S_i(\{f - V_h\} \cap \mathcal{F}(W_i, c, f))$ , que no contiene autovalores que son raíces  $m$ -ésima de la unidad. Por lo tanto si  $f_i \in S_i^{-1}(B_i) \cap \{f - V_h\}$  por la elección de los abiertos  $W_j^i$ , tenemos que  $h = f + f_1 + \dots + f_j$  satisface el lema.  $\square$

### Prueba de la proposición B

Sea  $\Gamma^1(T^cM)$  el conjunto de todos los campos vectoriales de clase  $C^1$  en la variedad cerrada  $T^cM$ , endosado con la topología  $C^1$ .

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \rho : C^\infty(M) &\rightarrow \Gamma^1(T^cM) \\ f &\mapsto X^f|_{T^cM} \end{aligned}$$

Siendo  $X^f(x, v) = (v, f(x)Y^0 \cdot v) \in H(x, v) \oplus V(x, v)$ , tenemos que si  $\rho(f_1) = \rho(f_2)$ , entonces  $f_1(x)Y^0 \cdot v = f_2(x)Y^0 \cdot v$  para todo  $x \in M$  y  $v \in T_x^cM$ , luego  $f_1 = f_2$ . Por lo tanto  $\rho$  es una aplicación inyectiva. Además, como la descomposición de  $T_\theta T^cM$  en sus componentes horizontal y vertical es continua, tenemos que  $\rho$  es continua.

Recordando que el subconjunto  $\mathcal{X}(a)$  de los campos vectoriales en  $T^cM$ , tales que, toda singularidad es hiperbólica y toda órbita periódica de período menor que  $a$  es no-degenerada, es abierto en  $\Gamma^1(T^cM)$  [3, pg 97]. Luego, por la continuidad de  $\rho$ , tenemos que  $G^1(c, a)$  es abierto.

Antes de probar la densidad observemos que

$$G^m(c, a) = \cap_{i=1}^m G^1(c, ia),$$

por lo tanto  $G^m(c, a)$  también es abierto para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Para probar la densidad, vamos a mostrar que dados  $f \in C^\infty(M)$  y  $\epsilon > 0$ , existe  $h \in G_{[\Omega_f]}^1(c, a)$ , con  $\|f - h\|_{C^k} < \epsilon$ , haciendo un número finito de perturbaciones de  $f$  aplicando sucesivamente los lemas 2.1.7 y 2.1.8 y el Teorema 1.1.2.

Sea  $K = K(c, f)$  dado por el Lema 1.3.1 y fijemos  $m = m(a, f) \in \mathbb{N}$ , tal que  $(m-1)\frac{K}{2} < a \leq m\frac{K}{2}$ . Por el lema 2.1.5 tenemos que existe una  $C^r$ -vecindad abierta  $V_0 \subset C^\infty(M)$  de  $f$ , tal que, si  $h \in V_0$ , entonces el flujo magnético  $\phi^h$  no posee ninguna órbita periódica de período menor que  $K$ . Por lo tanto  $f \in V_0 \subset G^1(c, K)$ .

*Inicialmente vamos a probar que existe  $f_1 \in G_{[\Omega_f]}^m(c, \frac{3K}{2})$ , tal que  $\|f - f_1\|_{C^k} < \frac{\epsilon}{m}$ .*

Definimos  $V_1 = V_0 \cap \{h \in C^\infty; [\Omega_h] = [\Omega_f]\}$ . Consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} ev : T^cM \times \mathbb{R} \times V_1 &\rightarrow T^cM \times T^cM \supset \Delta \\ (\theta, t, f) &\mapsto ev(f) = (\theta, \phi_t^f(\theta)). \end{aligned}$$

Supongamos que existe un punto  $(\theta_0, t_0, f_0) \in T^cM \times [0, \frac{3K}{2}] \times V_1$ , tal que  $ev(\theta_0, t_0, f_0) \in \Delta$ . Siendo que  $t_0 \leq \frac{3K}{2}$  y  $f_0 \in V_1$  tenemos que obligatoriamente  $t_0$  es el período minimal de la órbita  $\phi_{t_0}^{f_0}(\theta_0)$ . Aplicando el lema 2.1.7, tenemos que  $ev \bar{\cap}_{(\theta_0, t_0, f_0)}\Delta$ . Luego  $ev \bar{\cap}_{T^cM \times [0, \frac{3K}{2}]}\Delta$ . Por lo tanto, aplicando el Teorema 1.1.2 tenemos que el subconjunto de las funciones  $f \in V_1$  tales que  $ev(f)$  es transversal a  $\Delta$  en  $T^cM \times [0, \frac{3K}{2}]$  es denso en  $V_1$ . De este modo podemos tomar una función  $\bar{f}_1 \in V_1$  con

$$ev(\bar{f}_1) \bar{\cap}_{T^cM \times [0, \frac{3K}{2}]}\Delta, \text{ y } \|f - \bar{f}_1\|_{C^k} < \frac{\epsilon}{2m}.$$

Aplicando el lema 2.1.8 para la función  $\bar{f}_1 \in G_{[\Omega_f]}^1(c, \frac{3K}{2})$ , y  $m = m(a, f)$ , tenemos que existe una función

$$f_1 \in G_{[\Omega_f]}^m(c, \frac{3K}{2}) \text{ con } \|f_1 - \bar{f}_1\|_{C^k} < \frac{\epsilon}{2m}.$$

Por lo tanto, vale

$$\|f - f_1\|_{C^k} \leq \|f - \bar{f}_1\|_{C^k} + \|f_1 - \bar{f}_1\|_{C^k} < \frac{\epsilon}{m}$$

como queríamos.

-Ahora vamos a probar que existe  $f_2 \in G_{[\Omega, f]}^m(c, 2k)$ , tal que  $\|f_1 - f_2\|_{C^k} < \frac{\epsilon}{m}$ .

Disminuyendo  $\epsilon$  si es necesario, podemos suponer que  $f_1 \in V_1$ . Definimos  $V_2 = V_1 \cap G_{[\Omega, f]}^m(c, \frac{3k}{2})$ , y consideremos la aplicación  $ev$  en el abierto  $V_2$ , i.e

$$ev: T^cM \times \mathbb{R} \times V_2 \rightarrow T^cM \times T^cM \supset \Delta \\ (\theta, t, f) \mapsto ev(f) = (\theta, \phi_t^f(\theta)).$$

Supongamos que existe un punto  $(\theta_0, t_0, f_0) \in T^cM \times [0, 2K] \times V_2$ , tal que  $ev(\theta_0, t_0, f_0) \in \Delta$ . Denotemos por  $T$  el período minimal de la órbita periódica  $\phi_t^{f_0}(\theta_0)$ . Si  $T \leq \frac{3K}{2}$ , entonces, por la definición de  $G_{[\Omega, f]}^m(c, \frac{3K}{2})$ , tenemos que  $ev(f_0) \bar{\cap}_{(\theta_0, nT)} \Delta$  para todo  $1 \leq n \leq m$ . Como  $V_2 \subset V_1$  tenemos que  $K < T$ , lo que implica que  $t_0 < mT$ . Por lo tanto  $ev(f_0)$  es transversal a  $\Delta$  en el punto  $(\theta_0, t_0)$ . Si  $T \in (\frac{3K}{2}, 2K]$ , entonces obligatoriamente  $t_0 = T$ , y aplicando el lema 2.1.7 tenemos que la aplicación  $ev$  es transversal a  $\Delta$  en  $(\theta_0, t_0, f_0)$ , lo que prueba que  $ev \bar{\cap}_{T^cM \times [0, 2K]} \Delta$ . Luego por el Teorema 1.1.2, el subconjunto de las funciones  $f \in V_2$  tales que  $ev(f)$  es transversal a  $\Delta$  en  $T^cM \times [0, 2K]$  es denso en  $V_2$ . De este modo podemos tomar una función  $\bar{f}_2 \in V_2$ , con

$$ev(\bar{f}_2) \bar{\cap}_{T^cM \times [0, 2K]} \Delta, \text{ y } \|f_1 - \bar{f}_2\|_{C^k} < \frac{\epsilon}{2m}.$$

Aplicando nuevamente el lema 2.1.8 para la función  $\bar{f}_2 \in G_{[\Omega, f]}^1(c, 2K)$ , y  $m = m(a, f)$ , tenemos que existe  $f_2 \in G_{[\Omega, f]}^m(c, 2K)$  con

$$\|f_2 - \bar{f}_2\|_{C^k} < \frac{\epsilon}{2m}.$$

Por lo tanto

$$\|f_1 - f_2\|_{C^k} \leq \|f_1 - \bar{f}_2\|_{C^k} + \|f_2 - \bar{f}_2\|_{C^k} < \frac{\epsilon}{m}$$

como queríamos.

-Procediendo de modo análogo, para cada  $2 < i \leq m-1$ , obtenemos funciones  $f_i \in G_{[\Omega, f]}^m(c, i\frac{K}{2} + K)$ , con

$$\|f_i - f_{i-1}\|_{C^k} < \frac{\epsilon}{m}.$$

Finalmente, como  $G_{[\Omega, f]}^1(c, a) \subset G_{[\Omega, f]}^m(c, (m-1)\frac{K}{2} + K)$  y  $\|f - f_m\|_{C^k} < \epsilon$ , tenemos que  $f$  está en la cerradura del conjunto  $G_{[\Omega, f]}^1(c, a)$ . Siendo  $f$  arbitrario concluimos la prueba de la proposición.  $\square$

## 2.2. Transversalidad de las variedades invariantes.

En esta sección vamos a concluir la prueba del Teorema de Kupka-Smale para flujos magnéticos en una superficie cerrada y orientable.

Sea  $(M, g)$  una superficie cerrada y orientable y sea  $\Omega$  una 2-forma en  $M$ . Decimos que una órbita periódica  $\theta_t = \phi_t^\Omega(\theta)$ , con  $E(\theta) > 0$ , es *hiperbólica* si la aplicación de Poincaré linealizada no posee autovalor de norma igual a 1. Definimos las *subvariedades estable fuerte e inestable fuerte* de una órbita hiperbólica  $\theta_t$  en  $\theta = \theta_0$ , por:

$$W^{ss}(\theta) = \{v \in T^cM; \lim_{t \rightarrow \infty} d(\theta_t, \phi_t^\Omega(v)) = 0\}$$

$$W^{us}(\theta) = \{v \in T^cM; \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\theta_t, \phi_t^\Omega(v)) = 0\}$$

respectivamente, y definimos las *subvariedades estable e inestable* (débiles) de  $\theta_t$ , por:

$$W^s(\theta_t) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t^\Omega(W^{ss}(\theta)) \text{ y } W^u(\theta_t) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t^\Omega(W^{us}(\theta))$$

respectivamente.

**Observación 2.2.1.** Por los resultados generales de la teoría general de los flujos hamiltonianos, tenemos que  $W^s(\theta_t), W^u(\theta_t) \subset T^cM$  son subvariedades lagrangianas invariantes de  $TM$  con respecto a la estructura simpléctica  $\text{Twist } \omega(\Omega)$ . Por lo tanto  $\dim(W^s(\theta_t)) = \dim(W^u(\theta_t)) = \dim(M) = 2$ .

Decimos que un punto  $\xi \in T^cM$  es un *punto heteroclínico* cuando

$$\xi \in W^s(\vartheta_t) \cap W^u(\theta_t),$$

donde  $\theta_t$  y  $\vartheta_t$  son dos órbitas hiperbólicas contenidas en un nivel de energía a  $T^cM$ . Cuando esta intersección es transversal en  $T^cM$ , i.e

$$T_\xi W^s(\vartheta_t) \oplus T_\xi W^u(\theta_t) = T_\xi T^cM,$$

decimos que  $\xi$  es un *punto heteroclínico transversal*.

El siguiente teorema nos da una propiedad  $C^k$ -genérica para flujos magnéticos en una superficie, análoga a el teorema de Kupka-Smale.

**Teorema C.** *La siguiente propiedad*

$$P_{K-S}: \begin{cases} (i) & \text{todas las órbitas periódicas son no-degenerada y} \\ (ii) & \text{todos los puntos heteroclínicos son transversal,} \end{cases}$$

es  $C^r$ -genéricas para flujos magnéticos en superficies, para todo  $1 \leq r \leq \infty$ .

### 2.2.1. Prueba del Teorema C

Para cada  $c > 0$ , denotemos por  $\mathcal{K}(c)$  el subconjunto de las 2-formas  $\Omega \in \Omega^2(M)$ , tales que la propiedad  $P_{K-S}$  es válida para todo flujo magnético  $\phi_t^\Omega$  restringido al nivel de energía

$T^cM = E^{-1}(c)$ . Para probar el Teorema C debemos mostrar que  $\mathcal{K}(c)$  es  $C^r$ -residual en  $\Omega^2(M)$  y que, para cada clase de cohomología fija  $h \in H^2(M, \mathbb{R})$ , el subconjunto

$$\mathcal{K}_h(c) := \mathcal{K}(c) \cap \{[\Omega] = h\}$$

también es  $C^r$ -residual en  $\{[\Omega] = h\} \subset \Omega^2(M)$ .

Dado  $a > 0$ , por la Proposición B, el subconjunto  $G(c, a) \subset \Omega^2(M)$ , dado por (2), es abierto y denso en cada clase de cohomología  $h \in H^2(M, \mathbb{R})$ . Sea  $\mathcal{K}(c, a) \subset G(c, a)$  definido como:

$$K(c, a) := \{\Omega \in G(c, a); \text{ para toda pareja de órbitas hiperbólicas } \theta_t \text{ y } \vartheta_t \subset T^cM,$$

$$\text{de período } < a, W_a^u(\theta_t) \text{ y } W_a^s(\vartheta_t) \text{ son transversales en } T^cM\},$$

donde

$$W_a^s(\vartheta_t) = \{v \in W^s(\vartheta_t); \text{dist}_{W^s(\vartheta_t)}(\vartheta_t, v) \leq a\}$$

$$W_a^u(\theta_t) = \{v \in W^u(\theta_t); \text{dist}_{W^u(\theta_t)}(\theta_t, v) \leq a\}$$

son las subvariedades *estables* e *inestables* locales.

Siendo que, para toda  $\Omega \in G(c, a)$ , las órbitas periódicas de período  $< a$ , para un flujo  $\phi_t^\Omega|_{T^cM}$  son a lo más un número finito y que las variedades estables e inestables de dos órbitas hiperbólicas dependen continuamente en la topología  $C^1$  del campo vectorial, tenemos que  $K(c, a)$  es abierto en  $\Omega^2(M)$  para todo  $a > 0$ . De este modo, observando que

$$\mathcal{K}(c) = \bigcap_{a \in \mathbb{N}} K(c, a),$$

para probar el Teorema C, falta probar que cada  $\mathcal{K}_h(c, a)$  es denso en  $G_h(c, a)$  para toda  $h \in H^2(M, \mathbb{R})$ .

Sean  $\theta_t$  y  $\vartheta_t$  dos órbitas hiperbólicas en el nivel de energía  $T^cM$ , de un flujo magnético  $\phi_t^\Omega$ , con  $\Omega \in G_1(c, a)$ . Observemos que como  $W^u(\theta_t)$  y  $W^s(\vartheta_t)$  son invariantes, si  $W^u(\theta_t)$  y  $W^s(\vartheta_t)$  se intersectan, entonces ellas se intersectan en toda la órbita del punto en la intersección. Si esta intersección es transversal, entonces también lo es en todos los puntos de la órbita. Luego para probar la densidad es suficiente hacer perturbaciones locales de  $f$  de tal modo que las órbitas hiperbólicas sean preservadas y que las variedades  $W_a^u(\theta_t)$  y  $W_a^s(\vartheta_t)$  sean transversales para el flujo perturbado en un dominio fundamental de  $W_a^u(\theta_t)$ . Para esto usaremos el siguiente lema, cuya la demostración la daremos en la siguiente sección:

**Lema 2.2.2.** *Sea  $\xi \in W_a^u(\theta_t) \subset T^cM$ , tal que  $\pi|_{W^u(\theta_t)}$  es un difeomorfismo en una vecindad  $U \subset T^cM$  del punto  $\xi$ . Sea  $V \subset \bar{V} \subset U$  una vecindad suficientemente chica de  $\xi$  en  $T^cM$ . Entonces existe una 2-forma exacta  $d\eta$ , arbitrariamente cercana a  $0 \in \Omega^2(M)$  en la topología  $C^k$  ( $1 \leq k \leq \infty$ ), tal que:*

(a)  $\text{Supp}(d\eta) \subset \pi(U)$ .

(b)  $\theta_t$  y  $\vartheta_t$  son órbitas hiperbólicas del flujo magnético asociado a la 2-forma  $\tilde{\Omega} = \Omega + d\eta$ .

(c)  $\xi \in \tilde{W}_a^u(\theta_t)$ , donde  $\tilde{W}_a^u(\theta_t)$  denota la subvariedad inestable local de  $\theta_t$  en relación al flujo  $\phi_t^{(\Omega+d\eta)}$ .

(d) La componente conexa de  $\tilde{W}_a^u(\theta_t) \cup V$  que contiene a  $\xi$  y la subvariedad  $\tilde{W}^s(\vartheta_t)$  son transversales.

Sea  $K \subset W_a^u(\theta_t)$  un dominio fundamental de  $W^u(\theta_t)$ . Por el teorema de la función implícita, tenemos que  $\pi|_{W^u(\theta_t)}$  es un difeomorfismo en una vecindad de un punto  $\xi \in K$ , si y sólo,  $d_\xi \pi|_{W^u(\theta_t)}$  es un isomorfismo, que es equivalente a que  $T_\xi W^u(\theta_t) \cap V(\xi) = \{0\}$ .

Como  $T_\xi W^u(\theta_t) \subset T_\xi T^cM$  tenemos que si  $T_\xi W^u(\theta_t) \cap V(\xi) \neq \{0\}$ , entonces esta intersección es un subespacio de dimensión 1 tangente al nivel de energía, y por lo tanto coincide con  $V(\xi) \cap T_\xi T^cM$ . Luego el subconjunto

$$\{t \in \mathbb{R}; d_\xi \phi_t^\Omega(W^u(\theta_t)) \cap V(\phi_t^\Omega(\xi)) \neq 0\} \subset \{t \in \mathbb{R}; d_\xi \phi_t^\Omega(V(\xi)) \cap V(\phi_t^\Omega(\xi)) \neq 0\} = \{\text{puntos conjugados al punto } \xi\}.$$

Por lo tanto, para cada  $\xi \in K$  podemos elegir  $t_\xi \geq 0$ , tal que el punto  $\phi_{-t_\xi}^\Omega(\xi) \in W^u(\theta_t)$  satisface las condiciones del Lema 2.2.2, i.e.  $\pi|_{W^u(\theta_t)}$  es un difeomorfismo en una vecindad  $U_\xi$  del punto  $\phi_{-t_\xi}^\Omega(\xi)$ . Siendo que  $\Omega \in G(c, a)$ , podemos asumir que  $\pi(U)$  no intersecta ninguna órbita periódica de período  $\leq a$ .

Eligiendo vecindades  $V_\xi$ , tales que  $\phi_{-t_\xi}^\Omega(\xi) \in V_\xi \subset \bar{V}_\xi \subset U_\xi$ , con  $\xi \in K$ , y aplicando el flujo a estas vecindades, obtenemos una cubierta del compacto  $K$ , dada por  $K = \cup_{\xi \in K} W_\xi$ , donde  $W_\xi = \phi_{t_\xi}^\Omega(V_\xi)$ . De este modo tomando una subcubierta finita, obtenemos vecindades  $\{V_1, \dots, V_j\}$ , y tiempos  $\{t_1, \dots, t_j\}$ , tales que  $W_i = \phi_{t_i}^\Omega(V_i)$ , con  $1 \leq i \leq j$  es una subcubierta finita del dominio fundamental  $K$  y satisfacen las condiciones del Lema 2.2.2.

Así, aplicando el Lema (2.2.2) en el punto  $\phi_{-t_1}^\Omega(\xi_1)$  y las vecindades  $V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1$ , obtenemos una 2-forma exacta  $d\eta_1 \in \Omega^2(M)$ , de norma  $C^k$  arbitrariamente chica, tal que  $\text{Supp}(d\eta) \subset \pi(U_1)$  y la componente conexa de  $\tilde{W}^u(\theta_t) \cap \bar{V}_1$  que contiene al punto  $\phi_{-t_1}^\Omega(\xi_1)$  es transversal a  $\tilde{W}^s(\vartheta_t)$ . Como  $\Omega \in G(c, a)$  es abierto en  $\Omega^2(M)$  podemos suponer que  $\Omega + d\eta_1 \in G(c, a)$ .

Como la transversalidad en partes compacta de la variedad inestable es un condición abierta, podemos aplicar sucesivamente el lema (2.2.2) en  $V_i$ , obteniendo  $d\eta_i \in \Omega^2(M)$  de norma suficientemente chica de tal modo que las variedades invariantes son transversales en  $\bar{W}_1 \cup \dots \cup \bar{W}_i$ ,  $1 \leq i \leq j$ .

Ya que el las órbitas hiperbólicas de período  $< a$  son a lo más en un número finito, repitiendo el argumento de arriba para cada par de modo que los soportes de las perturbaciones sean ajenos, obtenemos una 2-forma exacta  $d\eta$  en  $M$  de norma  $C^r$  arbitrariamente chica tal que  $(\Omega + d\eta) \in \mathcal{K}(c, a)$ , lo que prueba el Teorema.  $\square$

### 2.2.2. Demostración del lema 2.2.2

Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica. Recordemos que para un hamiltoniano  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  el campo hamiltoniano  $X_H$  está definido por  $i_{X_H} \omega = dH$ . Decimos que una subvariedad

$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  es lagrangiana cuando  $\dim(\mathcal{M}) = 2\dim(\mathcal{N})$  y para cada subespacio tangente  $T_x\mathcal{N} \subset T_x\mathcal{M}$ , vale  $\omega_x|_{T_x\mathcal{N}} \equiv 0$ . El siguiente lema es una consecuencia de la definición.

**Lema 2.2.3.** Sea  $(\mathcal{M}, \omega)$  una variedad simpléctica de dimensión  $2n$  y  $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltoniano de clase  $C^2$ . Sea  $\mathcal{N} \subset H^{-1}(c)$  una subvariedad de dimensión  $n$ , con  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces:

(a) Si  $\mathcal{N}$  es lagrangiana, entonces el campo hamiltoniano  $X_H$  correspondiente a  $H$  es tangente a  $\mathcal{N}$ .

(b) Si  $\dim(\mathcal{M}) = 4$ , entonces vale el recíproco de (a).  $\square$

Vamos a utilizar un sistema de coordenadas locales especiales para una subvariedad lagrangiana, la cual llamaremos de *coordenadas de Darboux para una subvariedad lagrangiana*. La existencia de tales coordenadas está dada por el siguiente lema.

**Lema 2.2.4.** ([12, Lema A.2]) Sea  $\mathcal{N}$  una subvariedad lagrangiana contenida en un nivel de energía  $H^{-1}(c)$  para un hamiltoniano  $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  en una variedad simpléctica  $(\mathcal{M}, \omega)$ . Sea  $\theta \in \mathcal{M}$  y supongamos que  $\theta$  no es una singularidad del campo hamiltoniano  $X_H$ . Entonces existen una vecindad  $U \subset \mathcal{M}$  del punto  $\theta$  y un sistema de coordenadas locales  $(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  tal que:

$$(a) \quad \Omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i.$$

$$(b) \quad \mathcal{N} \cap U = [y = 0].$$

$$(c) \quad X_H|_{\mathcal{N}} = \frac{\partial}{\partial x_0}.$$

**Dem.:** Por el teorema de Weinstein [31, Teorema 3.32], existe una vecindad  $W_1$  de  $\mathcal{N}$  que es simplectomorfa a una vecindad de la sección cero de  $T^*\mathcal{N}$  con su estructura simpléctica canónica y que manda  $\mathcal{N}$  en  $\mathcal{N} \times 0$ . Por el Lema 2.2.3,  $\mathcal{N}$  es invariante por el flujo hamiltoniano  $\phi_t$  asociado a  $H$ . Sea  $V$  una caja de flujo para la restricción  $\phi_t|_{\mathcal{N}}$  conteniendo el punto  $\theta \in \mathcal{N}$ , tal que en las coordenadas locales correspondientes  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  para  $\mathcal{N}$ , valen:  $x(\theta) = 0 \in \mathbb{R}^n$  y  $X_H|_V = \frac{\partial}{\partial x_0}$ . Observemos que el sistema de coordenadas en la carta local  $(V, x)$  de  $\mathcal{N}$  induce un sistema de coordenadas en  $T^*\mathcal{N}$  dado por  $(x, y) : V \times \mathbb{R}^n \rightarrow T^*V$ , con  $y_i = dx_i$ . De este modo, la estructura simpléctica canónica de  $T^*\mathcal{N}$ , en este sistema de coordenadas, se escribe como  $\sum_i dx_i \wedge dy_i$  y la sección cero  $V \times 0 \subset \mathcal{N} \times 0 \subset T^*\mathcal{N}$  está dada por  $[y = 0]$ . Luego componiendo estas coordenadas con el simplectomorfismo obtenemos el sistema de coordenadas deseado.  $\square$

Para hacer la perturbación local en el lema 2.2.2, vamos a usar el siguiente lema:

**Lema 2.2.5.** Sean  $\mathcal{N}, \mathcal{K}$  dos subvariedades lagrangianas contenidas en un nivel  $H^{-1}(c)$  de un hamiltoniano  $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  en una variedad simpléctica  $(\mathcal{M}, \omega)$  de dimensión 4. Sea  $p \in \mathcal{N}$  un punto no singular para el campo hamiltoniano  $X_H$ . Sea  $(t, x, y) : U \rightarrow [0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon] \times [-\epsilon, \epsilon]^2$  un sistema de coordenadas de Darboux para  $\mathcal{N}$  en una vecindad  $U$  de  $p \in \mathcal{N}$  dado por el Lema 2.2.4. Entonces, dados  $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1 < \epsilon$ , existe una sucesión de subvariedades  $\mathcal{N}_n \subset H^{-1}(c) \cap U$  de dimensión 2, tal que:

## 2.2. TRANSVERSALIDAD DE LAS VARIEDADES INVARIANTES.

(i)  $\mathcal{N}_n \rightarrow \mathcal{N}$  en la topología  $C^\infty$ .

(ii)  $\mathcal{N} \cap A = \mathcal{N}_n \cap A$ , donde

$$A = \{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; |x| \geq \epsilon_1 \text{ o } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\}.$$

(iii)  $\mathcal{N}_n$  es invariante en  $A \cup B$ , donde

$$B = \{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; |x| \leq \epsilon \text{ y } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}.$$

(iv)  $\mathcal{N}_n \cap C$  es invariante y transversal a  $\mathcal{K}$ , donde

$$C = \{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; |x| \leq \epsilon_2 \text{ y } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}.$$

(v)  $\int_{\mathcal{N}_n} i_n^* \omega = 0$ , donde  $i_n : \mathcal{N}_n \hookrightarrow U$  es la inclusión.

Con (ii)-(v) válidos para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Dem.:** Sean  $\alpha : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow [0, 1]$  y  $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  de clase  $C^\infty$ , tales que:

$$\begin{cases} \alpha(x) = 0, & \text{si } x \notin [-\epsilon_1, \epsilon_1] \\ \alpha(x) = 1, & \text{si } x \in [-\epsilon_2, \epsilon_2] \\ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \alpha(x) dx = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \beta(t) = 0, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(t) = 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Sea  $0 \leq s \leq \delta$  y consideremos  $f_s : [0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f_s(t, x) = (f_s^1(t, x), f_s^2(t, x)),$$

donde  $f_s^2(t, x) = s \alpha(x) \beta(t)$  y la función coordenada  $f_s^1 : [0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por la ecuación:

$$H(t, x; f_s(t, x)) = c. \quad (2.18)$$

Siendo que las curvas  $t \mapsto (t, x, 0, 0) \subset \mathcal{N}$  son soluciones del sistema hamiltoniano  $(\mathcal{M}, \omega, H)$ , tenemos que  $H(t, x, 0, 0) = c$  y  $\frac{\partial H}{\partial y_1}(t, x, 0, 0) \neq 0$ . Luego, por el Teorema de la Función Implícita, para todo  $s \in [0, \delta]$  con  $\delta$  suficientemente chico, podemos resolver la ecuación 2.18 para  $(t, x) \mapsto f_s^1(t, s)$ , con  $f_s^1$  de clase  $C^\infty$ .

Definimos

$$\mathcal{N}_s = \{(t, x; f_s(t, x)) \in \mathbb{R}^4; (t, x) \in [0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon]\}.$$

Observe que por construcción los soportes de las aplicaciones  $f_s$  están fijos y que  $\lim_{s \rightarrow 0} f_s = 0$ . Por lo tanto  $\mathcal{N}_s \rightarrow \mathcal{N}$  en la topología  $C^\infty$ , cuando  $s \rightarrow 0$ . Además, siendo  $f_s(t, x) = 0$  para todo  $(t, x) \in A$ , tenemos que

$$\mathcal{N}_s \cap A = \{(t, x, 0, 0) \in \mathbb{R}^4; (t, x) \in [0, 1/4] \times [-\epsilon, \epsilon]\} = \mathcal{N} \cap A.$$

Por lo tanto  $\mathcal{N}_{s_n}$  satisface (i) y (ii) para toda sucesión  $[0, \delta] \ni s_n \rightarrow 0$ .

Vamos ahora verificar (iii) y (v). Por el ítem (a) del lema 2.2.4 y la definición de las subvariedades  $\mathcal{N}_s$ , vale

$$i_s^* \omega = i_s^*(dt \wedge dy_1 + dx \wedge dy_2) = dx \wedge \frac{\partial f_s^2}{\partial t} dt = -s \alpha(x) \beta'(t) (dt \wedge dx), \quad (2.19)$$

para todo  $s \in [0, \delta]$ , donde  $i_s : \mathcal{N}_s \hookrightarrow U$  denota la inclusión. Ya que  $\beta(t)' = 0$  para todo  $t \in [1/2, 1]$ , tenemos que  $\mathcal{N}_s \cap B$  es lagrangiana. Siendo que  $H(\mathcal{N}_s) = c$ , el Lema 2.2.3 y (ii), implica (iii). Observemos que por 2.19 y (iii), la 2-forma  $i_s^* \omega$  tiene soporte compacto. Luego, usando que  $\int \alpha(x) dx = 0$ , obtenemos:

$$\int_{\mathcal{N}_s} i_s^* \Omega = -s \int_0^1 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \alpha(x) \beta'(t) dx dt = -s \int_0^1 \beta'(t) \left( \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \alpha(x) dx \right) dt = 0,$$

para todo  $s \in [0, \delta]$ , lo que prueba (v).

Por construcción  $\mathcal{N}_s \cap C = [y_2 = s] \cap H^{-1}(c)$ . Luego por la teoría básica de transversalidad, las subvariedades  $\mathcal{N}_s \cap C$  y  $\mathcal{K} \subset H^{-1}(c)$  son transversales en  $H^{-1}(c)$ , si y sólo,  $s \in [0, \delta]$  es un valor regular de la aplicación  $\pi_{y_2}|_{\mathcal{K}}$ , donde  $\pi_{y_2}$  es la proyección canónica en la coordenada  $y_2$ . De este modo, por el teorema de Sard, tenemos que existe una sucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \delta]$  convergente a 0, para la cual, la sucesión de subvariedades  $\mathcal{N}_{s_n}$  satisface (iv), lo que concluye la prueba del lema.  $\square$

### Demostración del lema 2.2.2:

Sea  $\xi \in W_a^u(\theta_t) \in T^c M$  tal que  $\pi|_{W_a^u(\theta_t)}$  es un difeomorfismo en una vecindad  $U$  de  $\xi$  en  $T^c M$ . Siendo  $W^u(\theta_t)$  y  $W^s(\vartheta_t)$  subvariedades invariantes de dimensión 2 contenidas en  $T^c M$ , por el Lema 2.2.3, tenemos que  $W^u(\theta_t)$  y  $W^s(\vartheta_t)$  son lagrangianas. Aplicando el Lema 2.2.5, obtenemos una subvariedad  $\mathcal{N} \subset U$ , que es invariante y transversal a  $W^s(\vartheta_t)$  en la cerradura de una vecindad  $V \subset U$ . Ya que se puede elegir tal subvariedad  $\mathcal{N}$  arbitrariamente  $C^\infty$ -cerca de  $W^u(\theta_t) \cap U$ , podemos suponer que la proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  restringida a  $\mathcal{N}$ , también es un difeomorfismo.

Por el lema 2.2.3, como  $\mathcal{N}$  no es invariante para el campo magnético  $X_f$ , tenemos que la forma Twist  $\omega(\Omega)$  no puede ser idénticamente nula en  $\mathcal{N}$ . Luego la 2-forma en  $\mathcal{N}$ , definida como

$$-i^* \omega(\Omega) = -\omega(\Omega)|_{\mathcal{N}} = -(\omega_0 + \pi^* \Omega)|_{\mathcal{N}},$$

donde  $i : \mathcal{N} \hookrightarrow U \subset TM$  denota la inclusión, es no nula.

Ya que  $\pi|_{\mathcal{N}}$  es un difeomorfismo, tenemos que  $(\pi|_{\mathcal{N}}^{-1})^* (-i^* \omega(\Omega))$  define una 2-forma no nula en  $\pi(U) \subset M$ . Por el ítem (iii) del lema 2.2.5, podemos extender esta 2-forma en  $\pi(U)$  a una 2-forma  $\tilde{\Omega}$  global en  $M$ , definiendo como cero fuera del abierto  $\pi(U) \subset M$ . Siendo la forma Twist  $C^\infty$  en  $TM$ , tenemos que  $\tilde{\Omega} \in \Omega^2(M)$  está arbitrariamente cerca de 0 en la topología  $C^k$ , para  $\mathcal{N}$  suficientemente cerca de  $W^u(\theta_t) \cap U$ .

Recordemos que por el Teorema de Stokes la aplicación lineal

$$H(M, \mathbb{R}) \ni [\Omega] \mapsto \int_M \Omega \in \mathbb{R}$$

es un isomorfismo. Siendo que  $\mathcal{N}$  satisface (v) en el Lema 2.2.5 y por definición de  $\tilde{\Omega}$ , vale:

$$\int_M \tilde{\Omega} = \int_{\pi(U)} \tilde{\Omega} = \pm \int_{\mathcal{N}} i^* \omega(\Omega) = 0,$$

lo que implica que  $\tilde{\Omega}$  es una 2-forma exacta en  $M$ .

Sea  $\tilde{\phi}_t : T^c M \rightarrow T^c M$  la restricción del flujo magnético asociado a la 2-forma  $(\Omega + \tilde{\Omega})$  al nivel de energía  $T^c M$ . Disminuyendo la vecindad  $U$ , si es necesario podemos suponer que las órbitas  $\theta_t$  y  $\vartheta_t$  no intersectan el abierto  $\pi(U)$ , lo que implica que  $\theta_t$  y  $\vartheta_t$  también son órbitas periódica hiperbólicas para el flujo perturbado  $\tilde{\phi}_t$ . Denotemos por  $\tilde{W}^s(\vartheta_t)$  y  $\tilde{W}^u(\theta_t)$  la variedad estable de  $\vartheta_t$  y la variedad inestable de  $\theta_t$  en relación a  $\tilde{\phi}_t$ , respectivamente.

Como la subvariedad  $W^s(\vartheta_t) \cap V$  solo depende del tiempo futuro y en el futuro esta se acumula en  $\vartheta_t$ . Tenemos que  $W^s(\vartheta_t) \cap V = \tilde{W}^s(\vartheta_t) \cap V$ , donde  $\tilde{W}^s(\vartheta_t) \cap V$  es la subvariedad estable de  $\vartheta_t$  en relación al flujo  $\tilde{\phi}_t$ .

Observemos que  $\mathcal{N}$  es una subvariedad lagrangiana para la estructura Twist  $\omega(\Omega + \tilde{\Omega})$ . De hecho, por construcción, vale:

$$\begin{aligned} i^* \omega(\Omega + \tilde{\Omega}) &= i^* [\omega_0 + \pi^*(\Omega + \tilde{\Omega})] = i^* (\omega_0 + \pi^* \Omega) + i^* (\pi^* \tilde{\Omega}) = i^* \omega(\Omega) + (\pi \circ i)^* \tilde{\Omega} = \\ &= i^* \omega(\Omega) + (\pi|_{\mathcal{N}})^* \left[ (\pi|_{\mathcal{N}}^{-1})^* (-i^* \omega(\Omega)) \right] = i^* \omega(\Omega) - i^* \omega(\Omega) = 0. \end{aligned}$$

Siendo  $\mathcal{N} \subset T^c M$ , nuevamente por el Lema 2.2.3, tenemos que  $\mathcal{N}$  es invariante por el flujo  $\tilde{\phi}_t$ , y observando que por el lema 2.2.5, la subvariedad  $\mathcal{N}$  y la componente conexa de  $W^u(\theta_t) \cap U$  que contiene a  $\xi$  coinciden en una vecindad de  $\theta_t$  disjunta del soporte de  $\tilde{\Omega}$ , tenemos que obligatoriamente la componente conexa de  $\tilde{W}^u(\theta_t) \cap V = \mathcal{N} \cap V$ , y por lo tanto es transversal a  $\tilde{W}^s(\vartheta_t)$ , lo que completa la prueba del Lema.  $\square$

## Capítulo 3

# K-jets de la aplicación de Poincaré

En este capítulo deseamos mostrar que ciertas propiedades de los k-jet de aplicaciones de Poincaré de órbitas cerradas son genéricas para flujos magnéticos en superficies cerradas y orientables.

### 3.1. El espacio de los k-jets para flujos magnéticos en superficies

Inicialmente vamos a recordar la definición del espacio de los k-jets para aplicaciones simplécticas en  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  que fijan la origen. Sea  $Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$  el espacio de los simplectomorfismos  $f : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  de clase  $C^\infty$ , tal que  $f(0) = 0$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$  consideremos la relación de equivalencia  $\sim_k$  en  $Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ , definida por:

$f \sim_k g \Leftrightarrow$  sus polinomios de Taylor de grado k en cero son iguales .

Dado  $f \in Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ , definimos el *k-jet* de simplectomorfismo  $f \in Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ , lo cual denotamos por  $jet^k(f) = jet^k(f)(0)$ , como su clase de equivalencia con respecto a la relación  $\sim_k$ . El *espacio de los k-jets simplécticos*  $J_s^k(n)$  es el conjunto de todas las clases de equivalencia con respecto a la relación  $\sim_k$  de elementos de  $Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0)$ . Observemos que  $J_s^k(n)$  es un espacio vectorial, además, considerando la estructura producto en  $J_s^k(n)$  definida como:

$$jet^k(f) \cdot jet^k(g) = jet^k(f \circ g) \quad \forall f, g \in Dif_{\omega_0}(\mathbb{R}^{2n}, 0),$$

tenemos que  $J_s^k(n)$  es un grupo de Lie. Cuando  $k = 1$ , podemos identificar  $J_s^1(n)$  con el grupo de Lie clásico  $Sp(n)$ .

Decimos que un subconjunto  $Q \in J_s^k(n)$  es *invariante*, cuando para todo  $\sigma \in J_s^k(n)$ , vale:

$$\sigma \cdot Q \cdot \sigma^{-1} = Q. \quad (3.1)$$

El subconjunto  $Q \subset J_s^k(n)$  de todas las aplicaciones simplécticas  $f : (\mathbb{R}^{2n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ , tales que  $\det(d_0 f - I) \neq 1$ , es claramente un ejemplo de un subconjunto invariante de  $J_s^k(n)$ .

Sean  $(M, g)$  una superficie riemanniana y  $\Omega$  una 2-forma en  $M$ . Supongamos que  $\theta_t = \phi^\Omega(\theta) : [0, T] \rightarrow TM$  es una órbita periódica de período  $T > 0$ . Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie local contenida en el nivel de energía  $T^cM = E^{-1}(E(\theta)) \subset TM$  transversal a  $\theta_t$  en  $T^cM$  en el punto  $\theta$ . La aplicación de Poincaré del flujo de una vecindad de  $\theta \in U_\theta \subset \Sigma$ , en  $\Sigma$  es dada por:

$$P = P(\theta, \Sigma, \Omega) : \Sigma \supset U_\theta \rightarrow \Sigma$$

$$u \mapsto \phi_{\tau(u)}^\Omega(u)$$

donde  $\tau : U_\theta \rightarrow \mathbb{R}$  es el tiempo del primer retorno de la órbita  $\phi_t^\Omega(u)$  en  $\Sigma$ . Recordemos que  $P(\theta, \Sigma, \eta)$  es un simplectomorfismo con respecto a la estructura simpléctica inducida por la forma Twist  $\omega(\Omega)$  en  $\Sigma$ . Usando un sistema de coordenadas de Darboux, podemos suponer que  $\Sigma$  es una vecindad de 0 en  $\mathbb{R}^2$ , la forma twist en  $\Sigma$  es la forma de área en  $\mathbb{R}^2$  y que  $P(0) = 0$ . Por lo tanto  $jet^k(P) \in J_s^k(1)$ .

**Observación 3.1.1.** Dado un subconjunto  $Q \subset J_s^k(1)$  invariante, entonces, por (3.1), la propiedad de que el  $k$ -jet de una aplicación de Poincaré sobre una órbita periódica pertenece a  $Q$ , no depende de la sección transversal y tampoco del sistema de coordenadas elegido

Nuestro principal resultado de este capítulo puede ser enunciado del siguiente modo:

**Teorema 3.1.2.** Sea  $Q \subset J_s^k(1)$  abierto e invariante, tal que  $jet^k(P(\theta, \Sigma, \Omega)) \in \bar{Q}$ . Entonces existe una 2-forma exacta  $d\eta \in \Omega^2(M)$ , arbitrariamente  $C^r$ -cerca a cero, con  $r > k$ , tal que:

- (i)  $\theta_t$  es una órbita periódica de mismo período para el flujo  $\phi_t^{\Omega+d\eta}$ ,
- (ii)  $jet^k(P(\theta, \Sigma, \Omega + d\eta)) \in Q$ .

Para  $k = 1$ , este teorema se reduce al Teorema 2.1.2, por lo tanto podemos considerar  $k \geq 2$ . Combinado el Corolario 2.1.1 y el Teorema 3.1.2, tenemos:

**Teorema D** Dado  $Q \subset J_s^k(1)$  abierto, denso e invariante, la propiedad  $P_Q$ : para toda órbita periódica el  $k$ -jet de la aplicación de Poincaré pertenece a  $Q$ ; es  $C^r$ -genérica para flujos magnéticos en una superficie orientable y cerrada, con  $r > k$ .

### 3.2. Caso general

Sean  $N$  una variedad de dimensión arbitraria,  $X$  un campo vectorial en  $N$  y  $\psi_t : N \rightarrow N$  el flujo asociado a  $X$ . Sean  $l : [0, T] \rightarrow N$  un segmento de órbita del flujo  $\psi$  y  $\Sigma(t)$  una familia de secciones transversales locales al flujo con  $l(t) \in \Sigma(t)$ , tal que en una vecindad de  $l(t)$  vale  $\Sigma(t) = f^{-1}(t)$ , para alguna función  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$ .

Dado un entero  $k > 0$ . Sea  $W$  un campo en  $N$  satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (a)  $jet^{(k-1)}(W)(l(t)) = 0, \forall t \in [0, T]$ .
- (b)  $l(0), l(T) \notin \text{Supp}(W)$ .

Denotemos por:

$$P_t : \Sigma(0) \rightarrow \Sigma(t) \quad \text{y} \quad P'_t : \Sigma(0) \rightarrow \Sigma(t)$$

### 3.3. FAMILIAS K-GENERALES

las aplicaciones de Poincaré, definidas en una vecindad local de  $l(0) \in \Sigma(0)$  en  $\Sigma(t)$ , con relación a los campos  $X$  y  $(X + W)$  respectivamente. Para cada  $t \in [0, T]$ , consideremos la aplicación

$$S_t(W) : (\Sigma(0), l(0)) \rightarrow (\Sigma(t), l(t))$$

definida como  $S_t(W) = P_t^{-1} \circ P'_t$ .

Siendo  $\Sigma(t)$  transversal a  $X$ , podemos descomponer el campo  $W$  localmente como  $W = W_1 + W_2$ , tal que,  $W_1|_{\Sigma(t)}$  es tangente a  $\Sigma(t)$  para todo  $t \in [0, T]$  y  $W_2$  es paralelo a  $X$ . Usando esta descomposición definimos  $W_t$  como el campo no-autónomo en  $\Sigma(0)$ , dado por  $W_t = (P_t)^*(W_1|_{\Sigma(t)})$ . La siguiente proposición relaciona el  $k$ -jets de la aplicación  $S_t(W)$  y el campo  $W_t$ , su prueba puede ser vista en [21, cap. 2].

**Proposición 3.2.1.** El  $k$ -jet de  $S_t(W)$  en  $(l(0))$  es igual al  $k$ -jet del flujo en tiempo  $t$  asociado al campo no-autónomo  $W_t$ . □

**Corolario 3.2.2.** El  $k$ -jet de orden de  $S_t(W)$  en  $(l(0))$  está determinado por el  $k$ -jet del campo  $W_1$  a lo largo de  $l(t)$ , y el 1-jet de  $P_t^{-1}$ , para todo  $t \in [0, t]$ . □

### 3.3. Familias k-generales

En esta sección vamos a hacer una perturbación especial del 1-jets de la aplicación de Poincaré.

Sea  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  un segmento de una  $\Omega$ -geodésica magnética, con  $E(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = c > 0$ . Supongamos que  $\gamma([0, T]) \subset M$  es un segmento sin autointersección. Sea  $\Sigma_t \subset T^cM$  una familia de secciones locales transversales al flujo en el punto  $\theta_t = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \phi_t^\Omega(\theta)$ . Para cada  $t \in [0, T]$ , denotemos por  $P_t(\Omega) = P(\theta, \Sigma_0, \Sigma_t, \Omega)$  la aplicación de Poincaré de  $\Sigma_0$  a  $\Sigma_t$ . Siendo  $(\Sigma_t, \omega(\Omega)|_{\Sigma_t})$  simpléctica, para  $\Sigma_t$  suficientemente chicos, podemos elegir una familia de sistemas de coordenadas locales de Darboux  $\psi_t : (\Sigma_t, \omega(\Omega)|_{\Sigma_t}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \omega_0)$ , con  $\psi_t(\theta_t) = 0$ , donde  $\omega_0 = dx \wedge dy$  es la forma de área en  $\mathbb{R}^2$ . Usando este sistema de coordenadas podemos suponer que  $P_t(\Omega)$  es una familia de simplectormorfismos en vecindades abiertas del origen en  $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$  que preservan el origen.

Vamos a denotar por  $\mathbb{R}[x, y]_k$  el espacio de los polinomios homogéneos reales de grado  $k$  en las variables  $x, y$ , i.e.

$$\mathbb{R}[x, y]_k = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i x^{k-i} y^i ; a_i \in \mathbb{R} \forall i \in \{0, \dots, k\} \right\}.$$

Un paso fundamental a la prueba del Teorema 3.1.2 es hacer una primera perturbación del flujo magnético para que el 1-jets de  $P_t(\Omega)$  en el punto  $\theta_0 \in \Sigma(0)$  esté en una posición especial, la cual definimos a continuación.

**Definición 3.3.1.** Decimos que una familia a un parámetro  $\sigma : [a, b] \rightarrow Sp(1)$  (de clase  $C^r$ ), con  $\sigma(a) = I$ , es **k-general** (de clase  $C^r$ ), cuando existen  $t_0, \dots, t_n \in [a, b]$ , tales que el subconjunto

$$\{F(\sigma_{t_i} \cdot (x, y))\}_{i=0}^n \subset \mathbb{R}[x, y]_k, \quad \text{donde } F(x, y) = x^k,$$

es una base del espacio  $\mathbb{R}[x, y]_k \approx \mathbb{R}^{k+1}$ .

Para ver que esta definición es no vacía consideremos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.3.2.** Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $\sigma : [0, 1] \rightarrow Sp(1)$ , dada por:

$$\sigma_t \cdot (x, y) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + ty, y).$$

Denotemos  $V_t^k(x, y) = F(\sigma_t \cdot (x, y)) = (x + ty)^k$ , usando la fórmula del binomio de Newton, obtenemos:

$$V_t^k(x, y) = \sum_{i=0}^k t^i \binom{k}{i} x^{k-i} y^i.$$

Siendo que  $\left\{ \binom{k}{i} x^{k-i} y^i \right\}_{i=0}^k$  es una base de  $\mathbb{R}[x, y]_k$ , podemos escribir

$$V_t^k = (1, t, \dots, t^k) \in \mathbb{R}^{k+1}.$$

Vamos a probar que existen valores  $t_0, \dots, t_k \in [0, 1]$ , tales que los vectores  $V_{t_i}^k$ , con  $i = 0, \dots, k$ , son linealmente independientes. Para lo cual consideremos la función  $\Psi^k : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\Psi^k(t_0, \dots, t_k) = \det [V_{t_i}^k]_{0 \leq i \leq k}.$$

De este modo basta probar que  $\Psi^k \neq 0$ . De hecho, haciendo inducción en  $k$ , tenemos que para  $k = 1$  vale:

$$\Psi^1(t_0, t_1) = t_1 - t_0,$$

por lo tanto  $\Psi^1 \neq 0$  en  $[0, 1]^2$ . Supongamos que  $\Psi^n \neq 0$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Debemos probar que  $\Psi^{n+1} \neq 0$ . Inicialmente observemos que  $V_t^{n+1} = (1, t, \dots, t^n, t^{n+1}) = (V_t^n, t^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$ , luego

$$\Psi^{n+1}(t_0, \dots, t_n, t_{n+1}) = \det \begin{bmatrix} V_{t_0}^n & \dots & V_{t_n}^n & V_{t_{n+1}}^n \\ t_0^{n+1} & \dots & t_n^{n+1} & t_{n+1}^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Por hipótesis de inducción tenemos que existen  $\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_n \in [0, 1]^{n+1}$ , tales que  $\Psi^n(\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_n) \neq 0$ . Luego existen  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , no todos nulos, tales que  $V_{\bar{t}_{n+1}}^n = \sum_{i=0}^n \lambda_i V_{\bar{t}_i}^n$ . Como operaciones elementales en las columnas de una matriz no cambian su determinante tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi^{n+1}(\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_n, t_{n+1}) &= \det \begin{bmatrix} V_{\bar{t}_0}^n & \dots & V_{\bar{t}_n}^n & 0 \\ (\bar{t}_0)^{n+1} & \dots & (\bar{t}_n)^{n+1} & (t_{n+1}^{n+1} - \sum_{i=0}^n \lambda_i (\bar{t}_i)^{n+1}) \end{bmatrix} = \\ &= + \left( t_{n+1}^{n+1} - \sum_{i=0}^n \lambda_i (\bar{t}_i)^{n+1} \right) \Psi^n(\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_n). \end{aligned}$$

### 3.3. FAMILIAS K-GENERALES

Por lo tanto,

$$\Psi^{n+1}(\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_n, t_{n+1}) \neq 0 \Leftrightarrow \left( t_{n+1}^{n+1} - \sum_{i=0}^n \lambda_i (\bar{t}_i)^{n+1} \right) \neq 0$$

lo que prueba por inducción que  $\Psi^{n+1} \neq 0$ .

**Proposición 3.3.3.** Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sea

$$G_k = \left\{ (\sigma_0, \dots, \sigma_k) \in \prod_{i=0}^k Sp(1); \{F(\sigma_i \cdot (x, y))\}_{i=0}^k \text{ es una base de } \mathbb{R}[x, y]_k \right\}.$$

Entonces  $G_k$  es abierto y denso en  $\prod_{i=0}^k Sp(1)$ .

**Dem.:** Por el ejemplo 3.3.2, el subconjunto  $G_k$  es no vacío. Fijando una base en  $\mathbb{R}[x, y]_k$  e identificándolo con  $\mathbb{R}^{k+1}$ , tenemos que  $G_k$  es el complemento en  $\prod_{i=0}^k Sp(1)$  del subconjunto:

$$G_k^c = \left\{ (\sigma_0, \dots, \sigma_k) \in \prod_{i=0}^k Sp(1); \det [F(\sigma_i)]_{0 \leq i \leq k} = 0 \right\}.$$

Por lo tanto  $G_k$  es un complemento no vacío de un subconjunto algebraico. Esto prueba que  $G_k$  es un abierto denso en  $\prod_{i=0}^k Sp(1)$ , como queríamos.  $\square$

Combinando el Teorema 2.1.2 con la Proposición 3.3.3, obtenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.3.4.** Para cada  $k, r \in \mathbb{N}$ , existe una 2-forma exacta  $d\xi$ , arbitrariamente  $C^r$ -cercana de  $0 \in \Omega^2(M)$ , tal que la familia a un parámetro  $dP_t^{\Omega+d\xi}$ , con  $0 \leq t \leq T$ , es  $k$ -general.

**Dem.:** Sea  $W \in M$  una vecindad tubular de  $\gamma([0, T])$ . Definimos

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(W, \gamma, T) = \left\{ d\xi \in \Omega^2(M); d\xi|_{\gamma([0, T])} \equiv 0, \text{ y } \text{Supp}(\xi) \subset W \right\}.$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $t_0 = t_0(k, T) \in (0, T]$ , tal que  $T = (k+1)t_0$  y denotemos  $\gamma_i(t) = \gamma(t + it_0)$ , con  $0 \leq i \leq k$ . Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{S}_T : \mathcal{F} &\rightarrow \prod_{i=0}^k Sp(1) \\ d\xi &\mapsto \prod_{i=0}^k d_{\phi_{it_0}^{\Omega}(\theta)} P_i(\Omega + d\xi) \end{aligned}$$

donde  $P_i$  es la aplicación de Poincaré de la sección  $\Sigma_{it_0}$  en  $\Sigma_{(i+1)t_0}$ . Aplicando  $k+1$  veces el Teorema 2.1.2 obtenemos que la aplicación  $\bar{S}_T$  es abierta cerca de  $0 \in \mathcal{F}$ , y como  $G^k \subset \prod_{i=0}^k Sp(1)$  es denso (Proposición 3.3.3), tenemos que existe una 2-forma exacta  $d\xi \in \mathcal{F}$ , con norma  $C^r$  arbitrariamente chica, tal que la familia a un parámetro correspondiente a  $\Omega + d\xi$  es  $k$ -general.  $\square$

## 3.4. Perturbación local para el Hamiltoniano Magnético

Sea  $(M, g)$  una superficie riemanniana, de clase  $C^\infty$ , no necesariamente compacta. Dada una 2-forma exacta  $d\eta \in \Omega^2(M)$ , podemos definir el Lagrangiano Magnético  $L_\eta : TM \rightarrow \mathbb{R}$  inducido por  $d\eta$ , como:

$$L_\eta(x, v) = \frac{1}{2}g(v, v) - \eta_x(v). \quad (3.2)$$

Observemos que  $L_\eta$  es un lagrangiano convexo y superlineal. Por lo tanto el flujo de Euler-Lagrange del lagrangiano  $L_\eta$  es conjugado a un flujo hamiltoniano en  $(T^*M, \omega_0)$  por la transformación de Legendre  $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ , definida por:

$$\mathcal{L}(x, v) = \left( x, \frac{\partial L_\eta}{\partial v}(x, v) \right)$$

El hamiltoniano correspondiente  $H_\eta : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ , lo cual llamamos de Hamiltoniano Magnético, está dado por:

$$H_\eta(x, p) = \frac{1}{2}|p + \eta_x|^2, \quad (3.3)$$

donde  $|\cdot|_x$  denota la norma inducida por la métrica  $g$  en  $T_x^*M$ .

Denotemos por  $X_\eta = X(H_\eta)$  el campo hamiltoniano de  $H_\eta$ , (i.e.,  $X_\eta$  es el único campo de vectores en  $T^*M$  que satisface la igualdad  $\omega(X_\eta, \cdot) = dH_\eta(\cdot)$ ), y  $\psi_t^\eta$  el flujo asociado al campo  $X_\eta$ .

Sea  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  un segmento de una  $d\eta$ -geodésica magnética sin autointersección. Siendo el flujo magnético de  $d\eta$  y el flujo hamiltoniano  $\psi_t^\eta$  conjugados por  $\mathcal{L}$ , tenemos que

$$\Gamma(t) := \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \left( \gamma(t), \frac{\partial L_\eta}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right) = (\gamma(t), p(t))$$

es un segmento de órbita de  $\psi_t^\eta$ .

Vamos a fijar un sistema de coordenadas locales en una vecindad de  $\Gamma([0, T]) \subset T^*M$  y describir localmente el hamiltoniano  $H_\eta$  y su campo en tal sistema de coordenadas.

Siendo que  $\gamma([0, T]) \subset M$  no posee puntos de autointersección podemos elegir un sistema de coordenadas  $x_1, x_2$  en una vecindad  $W \subset M$  de  $\gamma([0, T])$  tal que:

- $\gamma(t) = (t, 0)$ ,
- $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\} \Big|_{(t,0)}$  es una base ortogonal de  $T_{(t,0)}M$ ,

para todo  $t \in [0, t]$ .

Para cada  $x \in W$ , sea  $\{dx_1, dx_2\} \subset T_x^*M$  la base dual de  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\} \subset T_xM$ . Por lo tanto  $(x_1, x_2, dx_1, dx_2)$  es un sistema de coordenadas locales en una vecindad de  $\Gamma([0, T]) \subset T^*M$ , donde un punto  $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in T^*M$  representa el covector  $p = y_1 dx_1 + y_2 dx_2$  en el punto  $(x_1, x_2)$ . En este sistema de coordenada tenemos que:

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2, \quad (3.4)$$

$$H_\eta(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij}(x_1, x_2)(y_i + \eta_i)(y_j + \eta_j), \quad (3.5)$$

$$X_\eta = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial H_\eta}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial H_\eta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad y \quad (3.6)$$

$$\Gamma(t) = (t, 0, (1 - \eta_1(t, 0)), \eta_2(t, 0)), \quad (3.7)$$

donde  $[g^{ij}]_{0 \leq i, j \leq 2}$  denota la matriz inversa de los coeficientes de la métrica  $g$  en relación al sistema de coordenadas  $x_1, x_2$  en  $W$ , y la 1-forma  $\eta|_W = \eta_1 dx_1 + \eta_2 dx_2$ .

Sea  $[0, T] \mapsto \Lambda(t)$  una familia de hipersuperficies locales en  $T^*M$  pasando por el punto  $\Gamma(t)$ , definida en el sistema de coordenadas locales por  $\Lambda(t) = [x_1 = t]$ . Como  $\dot{\Gamma}(t) = X_\eta(\Gamma(t))$ , por (3.6) y (3.7), tenemos que la componente en la dirección  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  del campo  $X_\eta$  es no nula. Por lo tanto  $\Lambda(t)$  es una sección transversal local en el punto  $\Gamma(t)$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Denotemos por  $P_t = P(\Gamma(t), \Lambda(0), \Lambda(t), d\eta)$  la aplicación de Poincaré de una vecindad del punto  $\Gamma(0) \in \Lambda(0)$  en  $\Lambda(t)$ .

Ahora vamos a definir nuestro espacio de perturbación. Dado  $k > 1$ , definimos el subconjunto  $\mathcal{F}^k = \mathcal{F}(W, \gamma, \eta, T, k) \subset \Omega^2(M)$ , como el subconjunto de las 2-formas exactas  $d\xi$ , tales que  $\text{Supp}(\xi) \subset W \subset M$  y en las coordenadas locales  $(x_1, x_2)$  la 1-forma  $\xi$  se escribe como

$$\xi(x_1, x_2) = \xi_1(x_1, x_2) dx_1 = \delta(x_1) \beta(x_2) dx_1,$$

donde  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$ , satisface:

- $\text{Supp}(\beta) \subset (-\epsilon, \epsilon)$  con  $\epsilon$  suficientemente chico, y
- $jet^{k+1}(\beta)(0) = x_2^{k+1}$

y  $\delta \in \{h \in C^\infty(\mathbb{R}); \text{Supp}(h) \subset (0, T)\}$ . Vamos a considerar perturbaciones del tipo  $(\eta + \xi)$  para el hamiltoniano magnético (3.3).

Observemos que

$$d\xi(x_1, x_2) = -\delta(x_1) \frac{d}{dx_2} \beta(x_2) dx_1 \wedge dx_2.$$

Como  $jet^k(\beta)(0) = 0$ , tenemos que  $d\xi(\gamma(t)) = d\xi(t, 0) = 0$ . Luego  $\gamma(t)$  también es una geodésica magnética para  $d(\eta + \xi)$ . Sustituyendo  $\eta$  por  $(\eta + \xi)$  en (3.5), obtenemos:

$$\begin{aligned} H_{(\eta+\xi)} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} [y_i + (\eta_i + \xi_i)] [y_j + (\eta_j + \xi_j)] = \\ &= H_\eta + \xi_1 [g^{11}(y_1 + \eta_1) + g^{12}(y_2 + \eta_2)] + \frac{\xi_1^2}{2} g^{11} = \\ &= H_\eta + \xi_1 \frac{\partial H_\eta}{\partial y_1} + \frac{\xi_1^2}{2} g^{11}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Denotemos

$$F_\xi := F(\xi, k) = \xi_1 \frac{\partial H_\eta}{\partial y_1} + \frac{\xi_1^2}{2} g^{11} = \xi_1 \frac{\partial H_\eta}{\partial y_1} + \mathcal{O}(x_2^{2(k+1)}).$$

De este modo, por la igualdad (3.8), tenemos que localmente  $H_{(\eta+\xi)} = H_\eta + F_\xi$ , para toda 1-forma  $\xi$ , tal que  $d\xi \in \mathcal{F}^k$ . Por construcción tenemos que  $jet^k(F_\xi)(\Gamma(t)) = 0$ , para todo  $t \in [0, T]$ , y  $\Gamma(0), \Gamma(T) \notin \text{Supp}(F_\xi)$ .

Sea  $W_\xi$  el campo hamiltoniano para el hamiltoniano  $F_\xi : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e

$$W_\xi = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial F_\xi}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial F_\xi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Como las coordenadas del campo  $W_\xi$  son derivadas parciales de  $F_\xi$ , tenemos que  $W_\xi$  satisface las condiciones (a) y (b) en el caso general y del mismo modo podemos definir la aplicación  $S_t : (\Lambda(0), \Gamma(0)) \rightarrow (\Lambda(0), \Gamma(0))$  como

$$S_t(\xi) = S_t(W_\xi) = P_t^{-1} \circ P_t',$$

donde  $P_t' = P(\Gamma(t), \Lambda(0), \Lambda(t), d\eta + d\xi)$  denota la aplicación de Poincaré para el campo perturbado  $X_{(\eta+\xi)} = X_\eta + W_\xi$ , con  $d\xi \in \mathcal{F}^k$ .

Deseamos dar una descripción del k-jet de la aplicación  $S_T$  en función del término de la perturbación magnética dada por  $d\xi \in \mathcal{F}^k$ . Para lo cual consideremos la descomposición local  $W_\xi = W_\xi^1 + W_\xi^2$ , con  $W_\xi^1 = -\frac{\partial F_\xi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial y_2}$  y  $W_\xi^2 = W_\xi - W_\xi^1$ . Como  $\xi_1(x_1, x_2) = \delta(x_1)\beta(x_2)$  y  $jet^k(\beta)(0) = 0$ , calculando las derivadas parciales de  $F_\xi$ , tenemos que la única componente del campo  $W_\xi$  que tiene el k-jet no-nulo en  $\Gamma(t)$  es la componente en la dirección  $\frac{\partial}{\partial y_2}$ . Luego  $jet^k(W_\xi^2)(\Gamma(t)) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ . Además, ya que  $\Lambda(t) = [x_1 = t]$ , tenemos que  $W_\xi^1|_{\Lambda(t)}$  es tangente a  $\Lambda(t)$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

**Observación 3.4.1.** Aplicando la proposición 3.2.1 a  $W_\xi$  y  $\Lambda(t)$ , obtenemos que el k-jet de  $S_T(\xi)$  en el punto  $\Gamma(0)$  es igual al k-jet del flujo a tiempo  $T$  asociado al campo vectorial no-autónomo  $P_t^* \left( W_\xi^1|_{\Lambda(t)} \right)$ , en el punto  $\Gamma(0)$ .

Recordemos que en este caso, la aplicación de Poincaré posee las siguientes propiedades extras:

- (1) Para todo  $u \in \{\text{dominio de } P_t\} \cap \{\text{dominio de } P_t'\}$ , valen:

$$H_\eta(u) = H_\eta(P_t(u)) \quad \text{y} \quad H_{\eta+\xi}(u) = H_{\eta+\xi}(P_t'(u)),$$

(2)  $\omega_0$  induce una estructura simpléctica en la subvariedad  $\Sigma(t) \subset \Lambda(t)$ , definida como:

$$\Sigma(t) = \Lambda(t) \cap H_\eta^{-1}(H_\eta(\Gamma(0))), \quad t \in [0, T]$$

y la restricción  $P_t|_{\Sigma(0)} : \Sigma(0) \rightarrow \Sigma(t)$  es simpléctica.

(3)  $\Lambda(0) \cap H_{\eta+\xi}^{-1}(H_{\eta+\xi}(\Gamma(0))) = \Sigma(0)$  y  $\Lambda(T) \cap H_{\eta+\xi}^{-1}(H_{\eta+\xi}(\Gamma(0))) = \Sigma(T)$ , además la restricción  $P_T|_{\Sigma(0)} : \Sigma(0) \rightarrow \Sigma(T)$  también es simpléctica.

Las propiedades (1) y (2) son válidas para todo campo hamiltoniano en una variedad simpléctica y (3) es una consecuencia de la definición del espacio de perturbación  $\mathcal{F}^k$ .

Por las propiedades anteriores (1-3), tenemos que la subvariedad  $\Sigma(0) \subset \Lambda(0)$  es invariante por  $S_T$  y la restricción  $S_T|_{\Sigma(0)} : (\Sigma(0), \Gamma(0)) \rightarrow (\Sigma(0), \Gamma(0))$  es simpléctica. Vamos a dar una descripción del jet de  $S_T|_{\Sigma(0)}$  en  $\Gamma(0)$ .

Inicialmente observemos que como  $\frac{\partial H_\eta}{\partial y_1}(\Gamma(t)) \equiv 1$ , por el teorema de la función implícita, podemos parametrizar  $\Sigma(t)$  en función de las coordenadas  $x_2, y_2$ , i.e para cada  $t \in [0, T]$  existe un abierto  $U_t \in \mathbb{R}^2$  y una función  $\alpha_t : U_t \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que

$$\Sigma(t) = \{ (t, x_2, \alpha_t(x_2, y_2), y_2) \in \Lambda(t); (x_2, y_2) \in U_t \}.$$

Ya que  $T\Sigma(t) = \text{Ker}(dx_1) \cap \text{Ker}(dH_\eta) \subset \text{Ker}(dx_1)$ , la estructura simpléctica inducida por  $\omega_0$  en  $\Sigma(t)$  se escribe como

$$\omega_0|_{\Sigma(t)} = dx_2 \wedge dy_2.$$

Para cada  $d\xi \in \mathcal{F}^k$  y  $t \in [0, T]$ . Definimos

$$\begin{aligned} F_{\xi,t}(x_2, y_2) &= F_\xi|_{\Sigma(t)} = F_\xi(t, x_2, \alpha_t(x_2, y_2), y_2) = \\ &= \xi_1(t, x_2) \frac{\partial H_\eta}{\partial y_1}(t, x_2, \alpha_t(x_2, y_2), y_2) + \mathcal{O}(x_2^{2(k+1)}), \end{aligned}$$

y denotemos por  $Z_{\xi,t}$  el campo hamiltoniano correspondiente al hamiltoniano  $F_{\xi,t} : \Sigma_t \rightarrow \mathbb{R}$ . Usando nuevamente que  $\frac{\partial H_\eta}{\partial y_1}(\Gamma(t)) \equiv 1$  y que  $\xi(x_1, x_2) = \delta(x_1)\beta(x_2) dx_1$ , con  $jet^{k+1}(\beta)(0) = x_2^{k+1}$ , tenemos que el  $(k+1)$ -jet de  $F_{\xi,t}$  en  $\Gamma(t)$  está determinado por el  $(k+1)$ -jet de  $\xi_1$  en el punto  $(t, 0)$ . Por lo tanto, denotando  $F(x_2, y_2) = x_2^{k+1}$ , tenemos

$$jet^{k+1}(F_{\xi,t})(\Gamma(t)) = \delta(t)F(x_2, y_2), \quad (3.9)$$

lo que define una familia a un parámetro de polinomios homogéneos de grado  $k+1$  en las variables  $x_2, y_2$ .

Finalmente podemos enunciar la siguiente proposición que nos da una descripción del k-jet de la aplicación  $S_T|_{\Sigma(0)} = S_T(\xi)|_{\Sigma(0)}$  en el punto  $\Gamma(0)$  en función del término de la perturbación magnética dada por  $d\xi \in \mathcal{F}^k$ .

**Proposición 3.4.2.** El k-jet de  $S_t|_{\Sigma(0)}$  en el punto  $\Gamma(0)$  es igual al k-jet en el punto  $\Gamma(0)$  del flujo hamiltoniano a tiempo  $t$  correspondiente al hamiltoniano no-autónomo  $[\delta(t)F \circ (P_t|_{\Sigma(0)})]$ .

Para probar esta proposición haremos uso de los siguientes lemas:

**Lema 3.4.3.** El campo  $W_\xi^1|_{\Sigma(t)}$  es k-jet tangente a  $\Sigma(t)$  en  $\Gamma(t)$ , i.e. existe un campo vectorial  $W_\xi^3$  tal que:

- (i) el k-jet de  $W_\xi^3$  es cero a lo largo de  $\Gamma([0, T])$ , y  
(ii)  $(W_\xi^1 - W_\xi^3)|_{\Sigma(t)}$  es tangente a  $\Sigma(t)$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

**Dem.:** Para cada  $T \in [0, T]$ , siendo  $\Lambda(t)$  transversal al campo, tenemos que la 1-forma  $dH_\eta|_{\Lambda(t)}$  es no nula. Luego podemos elegir un campo de vectores  $N_t$  en  $\Lambda(t)$ , tal que  $dH_\eta|_{\Lambda(t)}(N_t) = 1$ . Por construcción tenemos que  $N_t$  es transversal a  $\Sigma(t)$  en  $\Lambda(t)$ .

Sea

$$W_\xi^3|_{\Lambda(t)} = dH_\eta|_{\Lambda(t)}(W_\xi^1|_{\Lambda(t)}) N_t,$$

y consideremos la descomposición

$$W_\xi^1|_{\Lambda(t)} = W_\xi^3|_{\Lambda(t)} + (W_\xi^1 - W_\xi^3)|_{\Lambda(t)}.$$

Como  $W_\xi^1|_{\Lambda(t)}$  es tangente a  $\Lambda(t)$  tenemos que  $(W_\xi^1 - W_\xi^3)|_{\Lambda(t)}$  también es tangente a  $\Lambda(t)$ . Además vale:

$$dH_\eta|_{\Lambda(t)}((W_\xi^1 - W_\xi^3)|_{\Lambda(t)}) = dH_\eta|_{\Lambda(t)}(W_\xi^1|_{\Lambda(t)}) - dH_\eta|_{\Lambda(t)}((W_\xi^1|_{\Lambda(t)}) dH_\eta|_{\Lambda(t)}(N_t)) = 0,$$

por lo tanto  $(W_\xi^1 - W_\xi^3)|_{\Sigma(t)}$  es tangente a  $\Sigma(t)$ , lo que prueba (ii).

Falta mostrar que  $W_\xi^3$  satisface (i). De hecho por definición de  $W_\xi^3$  vale:

$$\begin{aligned} W_\xi^3|_{\Lambda(t)} &= dH_\eta|_{\Lambda(t)}((W_\xi^1|_{\Lambda(t)}) N_t) = -\frac{\partial F_\xi}{\partial x_2} dH_\eta|_{\Lambda(t)}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right) N_t = \\ &= \left(\delta(t) \frac{d\beta}{dx_2} \frac{\partial H_\eta}{\partial y_1} + \mathcal{O}(x_2^{k+1})\right) dH_\eta|_{\Lambda(t)}\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right) N_t. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Observando que

$$(dH_\eta)(\Gamma(t))\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right) = \omega_0(\Gamma(t))\left(X_\eta(\Gamma(t)), \frac{\partial}{\partial y_2}\right) = 0.$$

Calculando el k-jet de (3.10) en el punto  $\Gamma(t)$ , obtenemos que  $jet^k(W_\xi^3)(\Gamma(t)) = 0$ , como queríamos.  $\square$

**Lema 3.4.4.** Para cada  $t \in [0, T]$ , el campo hamiltoniano  $Z_{\xi,t}$  y el campo  $W_\xi^1|_{\Sigma(t)}$  tienen el mismo k-jet en  $\Gamma(t)$ .

**Dem.:** Siendo  $F_{\xi,t}(x_2, y_2) = F_\xi(t, x_2, \alpha_t(x_2, y_2), y_2)$ , tenemos que en las coordenadas  $(x_2, y_2)$  el campo  $Z_{\xi,t}$  está dado por:

$$Z_{\xi,t} = \left(\frac{\partial F_\xi}{\partial y_2} + \frac{\partial F_\xi}{\partial y_1} \frac{\partial \alpha_t}{\partial y_2}\right) \frac{\partial}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial F_\xi}{\partial x_2} + \frac{\partial F_\xi}{\partial y_1} \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_2}\right) \frac{\partial}{\partial y_2},$$

y como todas las derivadas parciales de  $F_\xi$ , excepto la de la dirección  $x_2$ , tienen k-jet cero en  $\Gamma(t)$ , obtenemos que el k-jet de  $Z_{\xi,t}$  en  $\Gamma(t)$  es igual al k-jet de  $W_\xi^1|_{\Sigma(t)} = -\left(\frac{\partial F_\xi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial y_2}\right)|_{\Sigma(t)}$ , como queríamos.  $\square$

### 3.4.1. Prueba de la proposición 3.4.2

Siendo  $P_t(\Sigma(0)) = \Sigma(t)$  y  $W_\xi^1|_{\Sigma(t)}$  k-jet tangente a  $\Sigma(t)$  en  $\Gamma(t)$  ( lema 3.4.3 ), tenemos que el campo  $P_t^*(W_\xi^1|_{\Sigma(t)})$  es k-jet tangente a  $\Sigma(0)$  en  $\Gamma(0)$ . Luego, por la observación 3.4.1, las subvariedades  $S_t(\Sigma(0))$  y  $\Sigma(0)$  son tangentes de orden  $k$  en  $\Gamma(0)$ . De este modo, para estudiar el k-jet de  $S_t$  en  $\Gamma(0)$ , podemos asumir que  $S_t$  deja  $\Sigma(0)$  invariante, y por el lema 3.4.4, podemos cambiar el campo  $W_\xi^1|_{\Sigma(t)}$  por el campo hamiltoniano  $Z_{\xi,t}$ . De este modo, obtenemos que el k-jet de  $S_t|_{\Sigma(t)}$  en  $\Gamma(0)$  es igual al k-jet del flujo a tiempo  $t$  asociado al campo  $P_t^*(Z_{\xi,t})$ . Por otro lado, si  $K = K_{\xi,t} = F_{\xi,t} \circ (P_t|_{\Sigma(0)})$  es un hamiltoniano no-autónomo en  $\Sigma(0)$  y  $X_K$  el campo hamiltoniano correspondiente, entonces, usando que  $P_t|_{\Sigma(0)} : \Sigma(0) \rightarrow \Sigma(t)$  es simpléctica, vale:

$$\begin{aligned} \omega_0(X_K, \cdot)|_{\Sigma(0)} &= dK = d(F_{\xi,t} \circ (P_t|_{\Sigma(0)})) = P_t^* dF_{\xi,t} = P_t^* \omega_0(Z_{\xi,t}, \cdot)|_{\Sigma(t)} = \\ &= \omega_0(P_t^* Z_{\xi,t}, \cdot)|_{\Sigma(0)}, \end{aligned}$$

y siendo  $\omega_0|_{\Sigma(0)}$  no-degenerada, tenemos que necesariamente  $X_K = P_t^* Z_{\xi,t}$ . Luego el k-jet de  $P_t^* Z_{\xi,t}$  en  $\Gamma(0)$  está totalmente determinado por el  $(k+1)$ -jet del hamiltoniano  $K = F_{\xi,t} \circ (P_t|_{\Sigma(0)})$  en  $\Gamma(0)$ , que, por (3.9), es igual al k-jet del hamiltoniano  $[\delta(t)F \circ (P_t|_{\Sigma(0)})]$ , lo que prueba la proposición.  $\square$

## 3.5. Perturbación del k-jet

Usando la misma notación de la sección anterior, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} S_T^k : \mathcal{F}^k &\rightarrow J_s^k(1) \\ d\xi &\mapsto jet^k(S_T(\xi)|_{\Sigma(0)})(\Gamma(0)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por definición de  $\mathcal{F}^k$ , tenemos que  $S_T^k(\mathcal{F}^k) \subset \text{Ker}(\pi_k)$ , donde  $\pi_k : J_s^{k+1}(1) \rightarrow J_s^k(1)$  es la proyección canónica.

**Observación 3.5.1.** Recordemos que  $J_s^k(1)$  es un grupo de Lie, con la estructura de grupo definida por

$$jet^k(f) \cdot jet^k(g) = jet^k(f \circ g)$$

y denotando por  $\mathfrak{J}_s^k(1)$  el espacio de los k-jets en  $0 \in \mathbb{R}^2$  de los campos de vectores simplécticos en  $(\mathbb{R}^2, dx_1 \wedge dx_2)$  que se anulan en el origen. Definimos el corchete  $[\cdot, \cdot]^k : \mathfrak{J}_s^k(1) \times \mathfrak{J}_s^k(1) \rightarrow \mathfrak{J}_s^k(1)$  por:

$$[jet^k(X), jet^k(Y)]^k = -jet^k([X, Y]).$$

Ya que  $X, Y$  son campos que se anulan en cero,  $[\cdot, \cdot]^k$  depende solamente de los k-jets de  $X$  y  $Y$ , así  $[\cdot, \cdot]^k$  define una estructura de álgebra de lie en  $\mathfrak{J}_s^k(1)$ . Además  $\mathfrak{J}_s^k(1)$  es el álgebra de Lie de  $J_s^k(1)$ . Más aún, la aplicación exponencial  $\exp : \mathfrak{J}_s^k(1) \rightarrow J_s^k(1)$ , está dada por:

$$\exp(t jet^k(X)) = jet^k(\psi_t),$$

donde  $\psi_t$  es el flujo local asociado a  $X$ . Para más detalles y las pruebas vea [22, §IV] y [7, §2].

**Proposición 3.5.2.** Sea  $k > 1$ , y supongamos que la familia  $[0, T] \rightarrow d_{\Gamma(0)}P_t|_{\Sigma(0)} \subset J_s^1(1)$ , es  $(k+1)$ -general. Entonces  $S_T^k(\mathcal{F}^k)$  es un abierto en  $\text{Ker}(\pi_k)$ .

**Dem.:** Puesto que  $\{d_{\Gamma(0)}P_t|_{\Sigma(0)}\}_{0 \leq t \leq T}$  es  $(k+1)$ -general, existen  $t_0, \dots, t_{k+1} \in (0, T)$ , tales que

$$\{F(dP_{t_i} \cdot (x_2, y_2))\}_{0 \leq i \leq k+1}$$

es una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}[x_2, y_2]_{k+1}$ , donde  $F(x_2, y_2) = x_2^{k+1} \in \mathbb{R}[x_2, y_2]_{k+1}$ .

Para cada  $0 \leq i \leq k+1$  y  $\lambda > 0$  suficientemente chico, sea  $\delta_\lambda(t_i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una aproximación  $C^\infty$  de la función delta de Dirac en el punto  $t_i$  con soporte en el intervalo  $[t_i - \lambda, t_i + \lambda]$  y consideremos las 1-formas

$$\xi_i = \xi_i(\lambda) = \delta_\lambda(t_i) \beta(x_2) dx_1.$$

tales que  $d\xi_i \in \mathcal{F}^k$ , para todo  $i \in \{0, \dots, k+1\}$ .

Por la proposición 3.4.2 y las propiedades de la aplicación exponencial, definida en la observación 3.5.1, vale:

$$D_0 S_t^k \cdot (\xi_i) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} S_t^k(s \xi_i) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \exp(t \text{jet}^k(s X_i)),$$

donde  $X_i$  denota el campo hamiltoniano en  $\Sigma(0)$  correspondiente al hamiltoniano no-autónomo  $[\delta_\lambda(t_i)(t)F \circ (P_t|_{\Sigma(0)})]$ . Derivando en relación a  $t$  en ambos lados obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(D_0 S_t^k \cdot (\xi_i)) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \exp(t \text{jet}^k(s X_i)) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left( \frac{\partial}{\partial t} \exp(t \text{jet}^k(s X_i)) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left( d_{(t \text{jet}^k(s X_i))} \exp \cdot \text{jet}^k(s X_i) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{jet}^k(s X_i) = \text{jet}^k(X_i). \end{aligned}$$

Integrando, obtenemos que:

$$D_0 S_T^k \cdot (\xi_i) = \int_0^T \text{jet}^k(X_i) dt. \quad (3.12)$$

Por definición del campo  $X_i$  y la igualdad (3.12), tenemos que si  $\lambda \rightarrow 0$ , entonces  $D_0 S_T^k \cdot (\xi_i)$  converge al  $k$ -jet en  $\Gamma(0)$  del campo hamiltoniano autónomo en  $\Sigma(0)$  correspondiente al hamiltoniano  $H_i = [F \circ (P_t|_{\Sigma(0)})]$ .

Calculando el  $(k+1)$ -jet de  $H_i$  en  $\Gamma(0)$  obtenemos:

$$\text{jet}^{k+1}(H_i) = [F \circ (d_{\Gamma(0)}P_t|_{\Sigma(0)})].$$

Siendo que  $\{F \circ (d_{\Gamma(0)}P_t|_{\Sigma(0)})\}_{0 \leq i \leq k+1}$  es una base de  $\mathbb{R}[x_2, y_2]_{k+1}$ , tenemos que para  $\lambda$  suficientemente chico  $\{D_0 S_T^k \cdot (\xi_i)\}_{0 \leq i \leq k+1}$  forma una base del Álgebra de Lie de  $\text{Ker}(\pi_k)$ . Por lo tanto la aplicación  $S_T^k$  es una submersión local, lo que prueba que  $S_T^k(\mathcal{F}^k)$  es un abierto de  $\text{Ker}(\pi_k)$ , como queríamos.  $\square$

### 3.5.1. Prueba del Teorema 3.1.2

*Inicialmente vamos considerar sólo el caso exacto.* Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  una  $d\eta$ -geodésica magnética periódica, de período  $T_0 > 0$  y sea  $H_\eta : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  el hamiltoniano magnético asociado a  $\eta$ . Siendo el número de puntos de autointersección finito, podemos elegir  $T \in (0, T_0]$ , tal que el segmento  $\gamma([0, T])$  no contenga puntos de autointersección de la curva  $\gamma$ , y una vecindad tubular  $W \subset M$  de  $\gamma([0, T])$ , suficientemente chica de tal modo que  $W \cap \gamma = \gamma([0, T])$ . De este modo, podemos elegir un sistema de coordenadas locales  $x_1, x_2$  en  $W$ , una familia de secciones transversales locales  $\Sigma(t) \in H_\eta^{-1}(H_\eta(\Gamma(0))) \subset T^*M$ , como en la sección anterior.

Por la proposición 3.3.4, existe una 2-forma exacta  $d\bar{\eta}$  arbitrariamente  $C^r$ -cercana a  $d\eta$ , con  $r \in \mathbb{N}$ , tal que la familia a un parámetro correspondiente,  $[0, T] \mapsto d_{\Gamma(0)}P_t|_{\Sigma(0)}$ , es  $s$ -general para todo  $s = 2, 3, \dots, k+1$ .

Sean  $\mathcal{F}^i = \mathcal{F}^i(W, \gamma, \bar{\eta}, T) \subset \Omega^2(M)$ ,  $2 \leq i \leq k$ , como en la sección anterior, y sea

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(W, \gamma, T) = \left\{ d\xi \in \Omega^2(M); d\xi|_{\gamma([0, T])} \equiv 0 \text{ y } \text{supp } d\xi \subset W \right\}.$$

Es claro que  $\mathcal{F}^i \subset \mathcal{F}$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} S : \mathcal{F} &\rightarrow J_s^k(1) \\ d\xi &\mapsto \text{jet}^k(S(\xi))(\Gamma(0)) \end{aligned}$$

donde  $S(\xi) = P(\Sigma(0), \Sigma(0), \bar{\eta})^{-1} \circ P(\Sigma(0), \Sigma(0), \bar{\eta} + \xi)$ .

**Observación 3.5.3.** Siendo que  $\text{Supp}(\xi) \subset W$  para toda  $d\xi \in \mathcal{F}$  y que

$$P(\Sigma(0), \Sigma(0), p) = P(\Sigma(0), \Sigma(T), p) \circ P(\Sigma(T), \Sigma(T_0), p),$$

con  $p = \{\bar{\eta}, \bar{\eta} + \xi\}$ , entonces  $S(\xi) = S_T(\xi) = P_T(\bar{\eta})^{-1} \circ P_T(\bar{\eta} + \xi)$ .

Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.1.2 y la Proposición 3.5.2, tenemos que  $S_T$  es abierta en una vecindad de  $0 \in \mathcal{F}$ . Ya que  $\text{jet}^k(P(\theta, \Sigma, d\eta)) \in \bar{Q}$ , la abertura de  $S^k$  en una vecindad de cero implica que existe una 2-forma exacta  $d\xi$  arbitrariamente  $C^r$ -cercana a cero, con  $r > k$ , tal que el  $k$ -jet de  $S_T(\xi)$  pertenece a  $Q$ , lo que por la observación 3.5.3, prueba el teorema para el caso exacto.

*Vamos ahora a considerar el caso no exacto.* Sea  $\Omega$  una 2-forma en  $M$  no exacta y sean  $\gamma, T, W$  y  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(W, \gamma, T)$  como en el caso exacto. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe  $\epsilon > 0$ , tal que el segmento  $\gamma : [-\epsilon, T + \epsilon] \rightarrow M$  no posee puntos de autointersección.

Sea  $N \subset M$  una vecindad tubular abierta de  $\gamma((-\epsilon, T + \epsilon))$ , disminuyendo  $W$  podemos asumir que  $W \subset N$ . Observe que por definición del espacio de perturbación  $\mathcal{F}$ , si una 2-forma exacta  $d\xi \in \mathcal{F}$ , entonces  $\xi$  tiene soporte compacto en la vecindad  $W \subset N$ , por lo tanto la podemos extender a una 1-forma global en  $M$ , como cero fuera de  $W$ , y de este modo obtenemos una 2-forma exacta en  $M$  con soporte en  $W$ .

Como  $N$  es una vecindad tubular, tenemos que  $\Omega|_N = d\eta$ , para alguna 1-forma  $\eta$  en el abierto  $N \subset M$ . Por lo tanto la restricción del flujo magnético a la vecindad  $TN = T_N M \subset TM$  es un flujo magnético exacto. Luego la restricción del flujo a  $TN$  es conjugado al flujo hamiltoniano en  $(T^*N, \omega_0)$  correspondiente al hamiltoniano  $H_\eta : T^*N \rightarrow \mathbb{R}$ , definido en 3.3. Ya que el k-jet en un punto de una aplicación está totalmente determinado por su restricción a una vecindad cualquiera de tal punto y por la observación 3.5.3, basta probar el Teorema para un segmento  $\gamma([0, T])$  en el abierto  $N$ , lo que reduce el teorema al caso exacto. □

## Capítulo 4

### Lema de Franks

En este capítulo vamos a probar un resultado análogo para flujos magnéticos en superficies cerradas de la parte infinitesimal del lema de Franks, demostrado para difeomorfismos en [14].

#### 4.1. Lema de Franks para flujos magnéticos en superficies

Sea  $(M, g)$  una superficie cerrada y orientable. Denotemos por  $\Omega_0$  la forma de área en  $M$  inducida por la métrica  $g$ . Como en el capítulo 2, para simplificar nuestros argumentos, vamos a identificar  $\Omega^2(M)$  con  $C^\infty(M)$ , asociando a cada  $f \in C^\infty(M)$  la 2-forma  $\Omega_f = f\Omega_0$ .

Recordemos que, por la definición de la fuerza de Lorentz, tenemos  $Y(\Omega_f) = fY^0$ , donde  $Y_x^0 : T_x M \rightarrow T_x M$  es la única aplicación lineal que satisface:

$$\Omega_0(x)(u, v) = g_x(Y_x^0 \cdot u, v), \quad \forall u, v \in T_x M \text{ y } \forall x \in M$$

y la forma simpléctica Twist definida por  $\Omega_f$  se escribe como:

$$\omega_f = \omega(f\Omega_0) = \omega_0 + \pi^*(f\Omega_0) = \omega_0 + (f \circ \pi) \cdot (\pi^*\Omega_0)$$

Denotemos por  $X^f$  y  $\phi^f$  el campo y el flujo magnético asociados a la 2-forma  $\Omega_f$ , respectivamente. Entonces por (1), tenemos que las órbitas del flujo magnético están dadas por la solución de la ecuación:

$$\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = f(\gamma) Y^0 \cdot \dot{\gamma}$$

Observemos que la igualdad 2.1 implica que la restricción del flujo magnético al nivel de energía  $T^c M = E^{-1}\{c\}$  no posee puntos fijos, para todo  $c > 0$ .

Para simplificar la notación vamos a seguir denotando por  $\phi^f$  la restricción del flujo magnético a un nivel de energía positivo  $T^c M = E^{-1}(c)$ .

Sea  $\theta \in T^c M$ , tal que  $\phi_t^f(\theta)$  es una órbita de período minimal  $T_\theta \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  (cuando  $\phi_t^f(\theta)$  no es periódica definimos  $T_\theta = \infty$ ), y sea  $\gamma(t) = \pi \circ \phi_t^f(\theta)$  la geodésica magnética correspondiente.

Para cada  $t \geq 0$ , sea  $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(\phi_t^f(\theta)) \subset T_\theta T^c M$ , definido como:

$$\mathcal{N}(t) = \{\xi \in T_{\phi_t^f(\theta)} T^c M; g_{\gamma(t)}(d\pi(\xi), \dot{\gamma}(t)) = 0\}.$$

Siendo  $d_\theta \pi(X^f(\phi_t^f(\theta))) = \dot{\gamma}(t)$  (igualdad (1.5)), tenemos que  $\mathcal{N}(t)$  es transversal al campo  $X^f$  a lo largo de la órbita del punto  $\theta$ . Luego

$$T_{\phi_t^f(\theta)} T^c M = \mathcal{N}(t) \oplus \langle X^f(\phi_t^f(\theta)) \rangle;$$

y por lo tanto, la restricción de la forma simpléctica Twist  $\omega_f(\theta)$  en  $\mathcal{N}(\theta)$  es no degenerada. Note que  $\mathcal{N}(\theta)$  no depende de la 2-forma  $f\Omega_0$ .

Sea  $\Sigma_t \in T^c M$  una sección transversal al campo en el punto  $\phi_t^f(\theta)$ , tal que  $T_\theta \Sigma_t = \mathcal{N}(t)$ . Vamos a denotar por

$$d_\theta P_t(f) = d_\theta P(f, \Sigma_0, \Sigma_t) : \mathcal{N}(0) \rightarrow \mathcal{N}(t),$$

la aplicación de Poincaré linealizada.

Recordemos que si

$$K = K(c, f) = \min \left\{ \frac{1}{(\|f\|_{C^0} + 1)^2}, \frac{i(M, g)}{2c} \right\},$$

entonces, por el lema 1.3.1, el segmento  $\gamma : [0, K] \rightarrow M$  es inyectivo, y por lo tanto  $K \leq T_\theta$ . Además los puntos de autointersección del segmento de la geodésica magnética  $\gamma([0, t])$  son a lo más un número finito de puntos, para todo  $0 < t < T_\theta$ .

Sea  $W \subset M$  una vecindad tubular de  $\gamma : (0, K) \rightarrow M$ . Para cada  $T_0 \in [K, T_\theta]$  definimos el subconjunto  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f, \theta, W, T_0) \subset C^\infty(M)$ , como el conjunto de las funciones  $\bar{f} \in C^\infty(M)$ , tales que:

- $\bar{f}(\gamma(t)) = f(\gamma(t)), \forall t \in [0, T_0],$
- $[\Omega_{\bar{f}}] = [\Omega_f] \in H^2(M, \mathbb{R}).$
- $\text{Supp}(\bar{f} - f) \subset W$  y

Luego, si  $\bar{f} \in \mathcal{F}$ , entonces  $\gamma$  satisface:

$$\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t) = \bar{f}(\gamma(t)) Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t), \forall t \in [0, T_0].$$

Por lo tanto, la órbita del punto  $\theta$  por el flujo  $\phi_t^{\bar{f}}$  coincide con la del flujo magnético de  $f$  en el intervalo de tiempo  $[0, T_0]$ , para toda  $\bar{f} \in \mathcal{F}$ . Observemos que si  $\phi_t^f(\theta)$  es una órbita periódica, entonces toda la órbita  $\phi_t^f(\theta)$  es preservada por perturbaciones de  $f$  contenidas en  $\mathcal{F}(f, \theta, W, T_\theta) = \mathcal{F}(f, \theta, W)$ . Además si  $\Omega_f$  es exacta, entonces  $\Omega_{\bar{f}}$  también lo es.

De este modo, a cada  $\frac{K}{2} < T \leq K$  fijo, podemos definir la aplicación

$$S_{T, \theta} : \mathcal{F}(f, \theta, W, T_0) \rightarrow Sp(1) \\ \bar{f} \mapsto d_\theta P_T(\bar{f})$$

El siguiente resultado es el análogo para flujos magnéticos en superficies cerradas de la parte infinitesimal del lema de Franks (demostrado para difeomorfismos en [14]). En [12], Contreras y Paternain probaron una versión de este lema para flujos geodésicos en superficies con perturbaciones  $C^2$  de la métrica, lo que equivale a perturbaciones  $C^1$  del campo geodésico.

**Teorema 4.1.1.** Sean  $f_0 \in C^\infty(M)$ , y  $\frac{K}{2} < T \leq K$  ( $K = K(c, f_0)$ ). Dada  $\mathcal{U} \subset C^\infty(M)$ , una vecindad de  $f_0$  en la topología  $C^1$ , existe  $\delta = \delta(\mathcal{U}, f_0, c) > 0$ , tal que la imagen de  $\mathcal{U} \cap \mathcal{F}(f_0, \theta, W, T)$  por la aplicación  $S_{T, \theta}$  contiene una bola de radio  $\delta$  centrada en  $S_{T, \theta}(f_0)$ . Más aún, si  $K \leq T_0 \leq T_\theta$ , entonces existe una vecindad  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\theta, f_0, c, W, T_0) \subset M$  de  $\gamma([T, T_0])$ , tal que la imagen de conjunto  $\mathcal{U} \cap \{f \in \mathcal{F}; \text{Supp}(f - f_0) \subset W - \mathcal{U}\}$  por la aplicación  $S_{T, \theta}$  contiene una bola de radio  $\delta$  centrada en  $S_{T, \theta}(f_0)$ .

Vamos a probar este Teorema en la sección 4.2. Para lo cual vamos a emplear básicamente los pasos utilizados por Contreras y Paternain, en [12], adaptando la perturbación utilizada por ellos a una perturbación  $C^1$  de la 2-forma  $\Omega_{f_0}$  por 2-formas exactas. En el Teorema 2.1.2, probamos que dada una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $f_0$  en la topología  $C^k$  (con  $1 \leq k$ ) la imagen por  $S_{T, \theta}$  de  $\mathcal{U} \cap \mathcal{F}(f_0, \theta, W, T_0)$  es abierta en  $Sp(1)$ , pero para  $2 \leq k$  no tenemos ningún control sobre el diámetro mínimo de la bola centrada en  $S_{T, \theta}(f_0)$  contenida en la imagen que no dependa de la vecindad  $W$  y de los puntos  $\theta \in T^c M$ , con  $T_0 \leq T_\theta$ .

Deseamos aplicar el Teorema 4.1.1 en un número finito de segmentos de una geodésica magnética cerrada  $\gamma : [0, T_\theta] \rightarrow M$  ( $T_0 = T_\theta < \infty$ ), de modo que la perturbación sea independiente en cada segmento. De este modo, obtenemos una perturbación de la linearización de la aplicación del primer retorno de Poincaré. Para esto, inicialmente fijemos  $t_0 \in (\frac{K}{2}, K]$  y  $n = n(\theta) = n(T_\theta, t_0) \in \mathbb{N}$ , tal que  $T_\theta = nt_0$ . Para cada  $0 \leq i \leq n-1$ , definimos  $\gamma_i = \gamma(it_0 + t)$ . Así, dada  $W_i \subset M$  una vecindad tubular de  $\gamma_i([0, t_0])$ , podemos definir la aplicación

$$S_{i, \theta} : \mathcal{F}(f_0, \theta, W_i) \rightarrow Sp(1) \\ f \mapsto d_{(\phi_{it_0}^f(\theta))} P(f, \Sigma_{it_0}, \Sigma_{(i+1)t_0}).$$

para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Sea  $W_0$  una vecindad tubular del segmento  $\gamma_0$ . Aplicando el Teorema 4.1.1 a la aplicación  $S_{0, \theta} : \mathcal{F}(f_0, \theta, c, W_0) \rightarrow Sp(1)$  obtenemos un  $\delta_0 > 0$  y una vecindad  $\mathcal{U}_0$  de  $\gamma_1 * \dots * \gamma_{n-1}$ , tal que vale la segunda parte del Teorema 4.1.1. Para el siguiente paso necesitamos tomar la vecindad tubular  $W_1 \subset \mathcal{U}_0$  y nuevamente aplicar el Teorema 4.1.1 a la aplicación  $S_{1, \theta} : \mathcal{F}(f_0, \theta, c, W_1) \rightarrow Sp(1)$ , obtenemos un  $\delta_1 > 0$  y una vecindad  $\mathcal{U}_1$  de  $\gamma_2 * \dots * \gamma_{n-1}$ . Procediendo de modo análogo obtenemos  $\delta_i > 0$  y vecindades  $W_i$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ . Luego para  $W = \cup_{i=0}^{n-1} W_i$  podemos definir

$$S_\theta : \mathcal{F}(f_0, \theta, W) \rightarrow \prod_{i=0}^{n-1} Sp(1)$$

$$f \longmapsto \prod_{i=0}^{n-1} d_{(\phi_{it_0}^f(\theta))} P(f, \Sigma_{it_0}, \Sigma_{(i+1)t_0})$$

Aplicando  $n$ -veces el Teorema 4.1.1 probamos que:

**Corolario 4.1.2.** Sea  $\theta \in T^c M$  tal que  $\phi_t^f(\theta)$  es una órbita periódica, y sean  $W, n(\theta)$  y  $S_\theta$  como arriba. Dada una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $f_0$  en la topología  $C^1$ , existe un  $\delta = \delta(f_0, \mathcal{U}, c)$ , tal que la imagen del conjunto  $\mathcal{F}(f_0, \theta, W) \cap \mathcal{U}$  por la aplicación  $S_\theta$  contiene un producto de bolas de radio  $\delta$  centrada en  $(S_{0,\theta}(f_0), \dots, S_{(n-1),\theta}(f_0))$ .

Siendo que  $[\Omega_f] = [\Omega_{f_0}] \in H^2(M, \mathbb{R})$  para toda  $f \in \mathcal{F}(f_0, \theta, W)$ , si  $d\eta = \Omega_{f_0}$  para alguna  $\eta \in \Omega^1(M)$ , entonces el flujo magnético asociado a  $\Omega_f$  es exacto, para toda  $f \in \mathcal{F}(f_0, \theta, W)$ . En este caso podemos reescribir el corolario anterior como:

**Corolario 4.1.3.** Sea  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $L(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v) - \eta_x(v)$ , y sea  $\theta \in T^c M$ , con  $c > 0$ , tal que la órbita del punto  $\theta$  por el flujo de Euler-Lagrange de  $L$  es una órbita periódica. Entonces, dada una vecindad  $\mathcal{U} \subset \Omega^1(M)$  en la topología  $C^2$ , existe un  $\delta = \delta(d\eta, \mathcal{U}, c, n)$ , tal que la imagen del conjunto  $\mathcal{F}(d\eta, \theta, W) \cap \mathcal{U}$  por la aplicación  $S_\theta$  contiene un producto de bolas de radio  $\delta$  centrada en  $(S_{0,\theta}(d\eta), \dots, S_{(n-1),\theta}(d\eta))$ .

## 4.2. Prueba del Teorema 4.1.1

Sea  $\psi : (0, T) \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow W$ , un sistema de coordenadas en  $W \subset M$ , tal que:

- $\psi(t, 0) = \gamma(t)$ , y
- $\left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\}_{\gamma(t)} = \{\dot{\gamma}(t), Y^0 \cdot \dot{\gamma}(t)\}$ ,

para todo  $t \in (0, T)$ . Sea  $a : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  una función de clase  $C^\infty$ , tal que:

- (i)  $a(0) = 0$       (ii)  $\text{Supp}(a) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- (ii)  $a'(0) = 1$     (iii)  $\|a\|_{C^1} = 1$
- (iv)  $\int_{-1}^1 a(x) dx = 0$

Definimos el subconjunto  $\mathcal{H} \subset C^\infty(M)$  de las funciones  $h \in C^\infty(M)$ , tales que,  $\text{Supp}(h) \subset W$  y vía el sistema de coordenadas  $\psi$  la función  $h : (0, T) \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$  se escribe como

$$h(t, x) = a_{\epsilon_0}(x)b(t),$$

donde  $a_{\epsilon_0}(x) = \epsilon_0 a\left(\frac{x}{\epsilon_0}\right)$ , y  $b \in C^\infty(\mathbb{R})$ , con  $\text{Supp}(b) \subset (0, T)$ .

Observemos que:

**Lema 4.2.1.** Sea  $h = a_{\epsilon_0}(x)b(t) \in \mathcal{H}$ . Entonces valen:

- (i)  $[\Omega_h] = 0$ ,
- (ii)  $\bar{f} = f + h \in \mathcal{F}$ ,  $\forall h \in \mathcal{H}$ , y  $\forall f \in \mathcal{F}$ ,
- (iii)  $\|h\|_{C^1} \leq 2\|b\|_{C^0} + \epsilon_0\|b\|_{C^1}$

## 4.2. PRUEBA DEL TEOREMA 4.1.1

**Dem.:** (i) Basta ver que si  $\eta$  es una 1-forma en  $M$  con soporte contenido en la vecindad  $W$ , tal que  $\eta|_W = \left(-\int_{-1}^x a_{\epsilon_0}(x)b(t) ds\right) dt$ , entonces calculando  $d\eta$ , obtenemos que  $d\eta = h\Omega_0$ .

(ii) Es una consecuencia directa de (i) y de la definición del conjunto  $\mathcal{H}$ .

(iii) Si  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suficientemente derivable, entonces:

$$\|g\|_{C^1} \leq \sup_{x,t} |g(x, t)| + \sup_{x,t} \left| \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right| + \sup_{x,t} \left| \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \right|.$$

Luego

$$\|h\|_{C^1} \leq \sup_{x,t} |a_{\epsilon_0}(x)b(t)| + \sup_{x,t} |a'_{\epsilon_0}(x)b(t)| + \sup_{x,t} |a_{\epsilon_0}(x)b'(t)|.$$

Siendo que  $|a_{\epsilon_0}(x)| = \left|\epsilon_0 a\left(\frac{x}{\epsilon_0}\right)\right| \leq \epsilon_0 \|a\|_{C^0} \leq \epsilon_0$ , y  $|a'_{\epsilon_0}(x)| = \left|a'\left(\frac{x}{\epsilon_0}\right)\right| \leq \|a\|_{C^1} = 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$\|h\|_{C^1} \leq (1 + \epsilon_0)\|b\|_{C^0} + \epsilon_0\|b\|_{C^1} \leq 2\|b\|_{C^0} + \epsilon_0\|b\|_{C^1}$$

como queríamos.  $\square$

Vamos ahora a fijar algunas constantes y funciones que necesitaremos para el siguiente lema.

Disminuyendo  $\mathcal{U}$  si es necesario podemos suponer que

$$\|f\|_{C^0} \leq \|f_0\|_{C^0} + 1, \quad \forall f \in \mathcal{U}$$

Por lo tanto  $K(c, f_0) \leq K(c, f)$ ,  $\forall f \in \mathcal{U}$ . Denotemos  $k_0 = K(c, f_0)$  y sea  $k_1 = k_1(\mathcal{U}, c) > 1$ , tal que, si  $f \in \mathcal{U}$  y  $X(t) = X(f, \theta, t)$  es la matriz fundamental de la ecuación (2.7), entonces

$$\|X(t)\| \leq k_1 \quad \text{y} \quad \|X^{-1}(t)\| \leq k_1, \quad \forall t \in [0, k_0] \quad \text{y} \quad \forall \theta \in T^c M. \quad (4.1)$$

Sean  $0 < \lambda \ll \frac{k_0}{2}$  y  $k_2 = k_2(\mathcal{U}, \lambda, c) > 0$ , tal que:

$$\max_{|t-k_0/2| \leq \lambda} \|X(t) - X(k_0/2)\| \leq k_2 \quad \text{y} \quad \max_{|t-k_0/2| \leq \lambda} \|X^{-1}(t) - X^{-1}(k_0/2)\| \leq k_2, \quad (4.2)$$

para toda  $f \in \mathcal{U}$  y  $\theta \in T^c M$ . Si  $\lambda = \lambda(f_0, \mathcal{U}, c)$  es suficientemente chico, vale:

$$0 < k_2 < \frac{1}{16 k_1^3} < 1 < k_1. \quad (4.3)$$

Sean  $\delta_\lambda, \Delta_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  aproximaciones de clase  $C^\infty$  de la función Delta de Dirac en el punto  $\frac{k_0}{2}$ , tales que  $\text{Supp}(\delta_\lambda) \subset [\frac{k_0}{2} - \lambda, \frac{k_0}{2}]$ ,  $\text{Supp}(\Delta_\lambda) \subset (\frac{k_0}{2}, \frac{k_0}{2} + \lambda]$ ,  $\int \delta_\lambda dt = \int \Delta_\lambda dt = 1$ , y  $\text{Supp}(\Delta_\lambda)$  es un intervalo.

Sea  $k_3 = k_3(\lambda) = k_3(f_0, \mathcal{U}, c)$ , definida como:

$$k_3 = k_1^2 \left( \|\delta_\lambda\|_{C^0} + \|\delta'_\lambda\|_{C^0} + \|\Delta_\lambda\|_{C^0} \|K_{\text{mag}}(f_0, c)\|_{C^0} + \frac{1}{2} \|\Delta''_\lambda\|_{C^0} \right). \quad (4.4)$$

Sea  $0 < \rho < 1/(4k_1^2 k_3)$ , por (4.3) tenemos que

$$\frac{1}{k_1^2} - k_3 \rho - 4k_1 k_2 > \frac{1}{2k_1^2}. \quad (4.5)$$

Finalmente, sea  $\alpha : [0, k_0] \rightarrow [0, 1]$  una aproximación de clase  $C^\infty$  de la función característica del conjunto

$$[0, T] - [\gamma^{-1}\{\gamma((T, T_0))\} \cup \partial \text{Supp}(\Delta_\lambda)]$$

tal que

$$\int_0^T |\alpha(t) - 1| dt \leq \rho. \quad (4.6)$$

**Lema 4.2.2.** Sea  $h^s = a_{\epsilon_0}(x)b^s(t) \in \mathcal{H}$  tal que  $b^{s=0} \equiv 0$ . Supongamos que

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} b^s(t) = \alpha(t) \left\{ \delta_\lambda(t)a + \delta'_\lambda(t)b - \left( \Delta_\lambda(t)K_{mag}(f)(t) + \frac{1}{2}\Delta''_\lambda(t) \right) c \right\} \quad (4.7)$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , y  $K_{mag}(f)(t)$  es la curvatura magnética de  $f \in \mathcal{U} \cap \mathcal{F}$ . Entonces

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} S_{\theta, T}(f + h^s) \right\| > \frac{1}{2k_1^3} \left\| \begin{bmatrix} b & c \\ a & -b \end{bmatrix} \right\|$$

**Dem.:** Aplicando el lema 2.1.4, obtenemos que:

$$\begin{aligned} Z(T) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} S_{T, \theta}(f + h^s) = X(T) \left\{ \int_0^T \alpha(t) \delta_\lambda(t) a X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) dt + \right. \\ &+ \int_0^T \alpha(t) \delta'_\lambda(t) b X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) dt - \\ &- \int_0^T \alpha(t) \Delta_\lambda(t) K_{mag}(f) c X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) dt - \\ &\left. - \frac{1}{2} \int_0^T \alpha(t) \Delta''_\lambda(t) c X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Integrando por partes en el segundo y cuarto término y usando que  $X(t)$  es solución de la ecuación (2.7), tenemos que

$$\begin{aligned} Z(T) &= X(T) \left\{ \int_0^T \alpha(t) \delta_\lambda(t) X^{-1}(t) \begin{bmatrix} b & 0 \\ a & -b \end{bmatrix} X(t) dt + \right. \\ &\left. + \int_0^T \alpha(t) \Delta_\lambda(t) X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Vamos a denotar

$$P(t) := \frac{1}{\alpha(t)} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (b^s(t)) X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t),$$

$$Q_1(t) := X^{-1}(t) \begin{bmatrix} b & 0 \\ a & -b \end{bmatrix} X(t),$$

$$Q_2 := X^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(t)$$

y  $Q_0 := Q_1 + Q_2$ . De este modo tenemos que

$$\int_0^T P(t) dt = \int_0^T \delta_\lambda(t) Q_1(t) dt + \int_0^T \Delta_\lambda(t) Q_2(t) dt \quad (4.8)$$

Usando (4.1), valen:

$$\|\delta_\lambda(t) Q_1(t)\| \leq \|\delta_\lambda\|_{C^0} \|Q_1(t)\| \leq \|\delta_\lambda\|_{C^0} k_1^2 \left\| \begin{bmatrix} b & 0 \\ a & -b \end{bmatrix} \right\|, \text{ y}$$

$$\|\Delta_\lambda(t) Q_2(t)\| \leq \|\Delta_\lambda\|_{C^0} \|Q_2(t)\| \leq \|\Delta_\lambda\|_{C^0} k_1^2 \left\| \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|.$$

Por (4.4), vale:

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \|P(t)\| &\leq \left[ |a| \|\delta_\lambda\|_{C^0} + |b| \|\delta'_\lambda\|_{C^0} + \left( \|\Delta_\lambda\|_{C^0} \|K_{mag}(f_0)\|_{C^0} + \frac{1}{2} \|\Delta''_\lambda\|_{C^0} \right) |c| \right] k_1^2 \\ &\leq k_3 \left\| \begin{bmatrix} b & c \\ a & -b \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para cada  $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , definimos:

$$\mathcal{O}_\lambda \left( F, \frac{k_0}{2} \right) = \max_{|t - \frac{k_0}{2}| \leq \lambda} \left\| F(t) - F \left( \frac{k_0}{2} \right) \right\|.$$

Observemos que si  $F, G : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $E \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz constante, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\lambda \left( F G, \frac{k_0}{2} \right) &= \max_{|t - \frac{k_0}{2}| \leq \lambda} \left\| F(t) G(t) - F \left( \frac{k_0}{2} \right) G \left( \frac{k_0}{2} \right) \right\| \leq \\ &\leq \max_{|t - \frac{k_0}{2}| \leq \lambda} \left\| F(t) G(t) - F(t) G \left( \frac{k_0}{2} \right) \right\| + \\ &+ \max_{|t - \frac{k_0}{2}| \leq \lambda} \left\| F(t) G \left( \frac{k_0}{2} \right) - F \left( \frac{k_0}{2} \right) G \left( \frac{k_0}{2} \right) \right\| \leq \\ &\leq \max_{|t - \frac{k_0}{2}| \leq \lambda} \|F(t)\| \mathcal{O}_\lambda \left( G, \frac{k_0}{2} \right) + \mathcal{O}_\lambda \left( F, \frac{k_0}{2} \right) \|G \left( \frac{k_0}{2} \right)\| \\ \mathcal{O}_\lambda \left( E F, \frac{k_0}{2} \right) &= \max_{|t - \frac{k_0}{2}| \leq \lambda} \left\| E F(t) - E F \left( \frac{k_0}{2} \right) \right\| \leq \\ &\leq \|E\| \mathcal{O}_\lambda \left( F, \frac{k_0}{2} \right). \end{aligned}$$

Así, escribiendo  $A = \begin{bmatrix} b & c \\ a & -b \end{bmatrix}$  y usando (4.1), (4.2) y las dos últimas desigualdades, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\lambda \left( Q_0, \frac{k_0}{2} \right) &= \mathcal{O}_\lambda \left( X^{-1}(t)AX(t), \frac{k_0}{2} \right) \leq \\ &\leq \max_{|t-\frac{k_0}{2}| \leq \lambda} \|X^{-1}(t)\| \mathcal{O}_\lambda \left( AX(t), \frac{k_0}{2} \right) + \mathcal{O}_\lambda \left( X^{-1}(t), \frac{k_0}{2} \right) \|A\| X \left( \frac{k_0}{2} \right) \leq \\ &\leq \max_{|t-\frac{k_0}{2}| \leq \lambda} \|X^{-1}(t)\| \|A\| \mathcal{O}_\lambda \left( X(t), \frac{k_0}{2} \right) + \mathcal{O}_\lambda \left( X^{-1}(t), \frac{k_0}{2} \right) \|A\| X \left( \frac{k_0}{2} \right) \leq \\ &\leq 2k_1 k_2 \|A\|. \end{aligned}$$

Usando (4.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T \alpha(t)P(t) dt - Q_0 \left( \frac{k}{2} \right) \right\| &= \\ &= \left\| \int_0^T \alpha(t)P(t) dt - \int_0^T P(t) dt + \int_0^T P(t) dt - Q_0 \left( \frac{k}{2} \right) \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_0^T (\alpha(t) - 1)P dt \right| + \left| \int_0^T P - Q_0(k_0/2) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^T \|(\alpha(t) - 1)P(t)\| dt + T(\mathcal{O}_\lambda(Q_1, k_0/2) + \mathcal{O}_\lambda(Q_2, k_0/2)) \leq \\ &\leq \left( \max_{[0, T]} \|P(t)\| \right) \int_0^T |\alpha(t) - 1| dt + 2T\mathcal{O}_\lambda(Q_0, k_0/2). \end{aligned}$$

Como  $T \leq k_0 \leq 1$ , por (4.9), (4.10) y (4.6), tenemos que

$$\left\| \int_0^T \alpha(t)P(t) dt - Q_0 \left( \frac{k}{2} \right) \right\| \leq (k_3 \rho + 4 k_1 k_2) \|A\|. \quad (4.10)$$

Además, siendo  $A = X(k_0/2) Q_0(k_0/2) X^{-1}(k_0/2)$ , nuevamente por (4.1), vale

$$\begin{aligned} \|A\| &= \|X(k_0/2) Q_0(k_0/2) X^{-1}(k_0/2)\| \leq k_1^2 \|Q_0(k_0/2)\| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|Q_0(k_0/2)\| \geq \frac{\|A\|}{k_1^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Luego, por (4.10), (4.11) y (4.3)

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T \alpha(t)P(t) dt \right\| &= \left\| Q_0 \left( \frac{k_0}{2} \right) + \int_0^T \alpha(t)P(t) dt - Q_0 \left( \frac{k_0}{2} \right) \right\| \geq \\ &\geq \|Q_0 \left( \frac{k_0}{2} \right)\| - \left\| \int_0^T \alpha(t)P(t) dt - Q_0 \left( \frac{k_0}{2} \right) \right\| \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \left( \frac{1}{k_1^2} - k_3 \rho - 4 k_1 k_2 \right) \|A\| \geq \\ &\geq \frac{1}{2k_1^2} \|A\|. \end{aligned}$$

Finalmente, por la última desigualdad y (4.1), tenemos que

$$k_1 \|Z(T)\| \geq \|X^{-1}Z(T)\| = \left\| \int_0^T \alpha(t)P(t) dt \right\| \geq \frac{1}{2k_1^2} \|A\|,$$

lo que prueba que

$$\|Z(T)\| \geq \frac{1}{2k_1^3} \|A\|, \quad \forall f \in \mathcal{U} \cap \mathcal{F}.$$

□

Denotemos por  $\mathfrak{sp}(1)$  el álgebra de Lie del grupo de Lie clásico  $Sp(1) = SL(2)$ . Para cada matriz  $A = \begin{bmatrix} b & c \\ a & -b \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(1)$ , sea  $\beta_A : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\beta_A(t) = \alpha(t) (\delta_\lambda(t)a + \delta'_\lambda(t)b) + \left( K_{mag}(f_0)(t) + \frac{\Delta''_\lambda}{2\Delta_\lambda(t)} \right) (e^{-\alpha(t)\Delta_\lambda(t)c} - 1).$$

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} G : \mathfrak{sp}(1) &\rightarrow C^\infty(M) \\ A &\mapsto G(A) \end{aligned}$$

tal que  $\text{Supp}(G(A)) \subset W$ , y en el sistema de coordenadas tubulares  $(t, x)$  en  $W$ , la restricción  $G(A)|_W = G(A)(t, x)$ , se escribe como

$$G(A)(t, x) = f_0(x, t) + a_{\epsilon_0}(x)\beta_A(t). \quad (4.12)$$

**Lema 4.2.3.** Para valores de  $\epsilon_0$  suficientemente chicos, existe  $\delta_1 = \delta_1(\mathcal{U}, f_0, c)$ , tal que, si  $\|A\| < \delta_1$ , entonces  $G(A) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{F}$ .

*Dem.:* Por el lema 4.2.1, tenemos que

$$\|G(A) - f_0\|_{C^1} = \|a_{\epsilon_0}(x)\beta_A(t)\|_{C^1} \leq 2\|\beta_A\|_{C^0} + \epsilon_0\|\beta_A\|_{C^1}.$$

Sea  $\epsilon > 0$ , tal que  $B_{C^1}(f_0, \epsilon) \subset \mathcal{U}$ , donde  $B_{C^1}(f_0, \epsilon)$  denota la bola de radio  $\epsilon$  centrada en  $f_0$  con relación a la norma  $C^1$ . Como  $\Delta_\lambda > 0$  para todo  $t \in \text{Supp}(\alpha)$ , tenemos que existe un  $k_6 = k_6(\lambda, f_0) = k_6(f_0, \mathcal{U}, c) < \infty$ , tal que

$$k_6 = \max_{\|A\| \leq 1} \|\beta_A\|_{C^1}.$$

## Capítulo 5

# Flujos magnéticos con entropía topológica positiva

En este capítulo vamos a estudiar la funcional  $\Omega \mapsto h_{top}(\Omega, c)$ , para  $c > 0$ , en una superficie cerrada y orientable, buscando subconjuntos con entropía topológica positiva. Los principales resultados de este capítulo son los Teoremas E y G.

### 5.1. Aplicaciones Twist y entropía topológica

Sean  $M$  una superficie orientable cerrada y  $\Omega$  una 2-forma en  $M$ . Supongamos que  $\phi_t^\Omega(\theta) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  es una órbita periódica de período minimal  $T > 0$ , contenida en un nivel de energía  $E(\theta) = c$ . Sean  $\Sigma \subset T^c M = E^{-1}(\theta)$  una sección transversal local conteniendo el punto  $\theta$  y sea  $P = P(\theta, \Sigma, \Omega)$  la aplicación de Poincaré correspondiente. Vamos asumir que  $\phi_t^\Omega(\theta)$  es no-hiperbólica, i.e, los autovalores de  $d_\theta P$  tienen norma 1.

Vamos ahora a enunciar el Teorema de la Forma Normal de Birkhoff, cuya prueba puede ser vista en [36, pg. 222], para dimensiones mayores vea [20, pg 101].

**Teorema 5.1.1.** *Sea  $f$  un difeomorfismo de clase  $C^4$ , definido en una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $f$  preserva la forma de área  $dx \wedge dy$  y  $f(0) = 0$ . Supongamos que los autovalores de  $d_0 f$  satisfacen:  $|\lambda| = 1$  y  $\lambda^n \neq 1$ , para todo  $n \in \{1, \dots, 4\}$ . Entonces existe un difeomorfismo  $h$ , definido en una vecindad de  $0$ , con  $h(0) = 0$  y  $h$  preserva la forma  $dx \wedge dy$ , tal que :*

$$h^{-1} \circ f \circ h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta(x^2 + y^2)) & -\sin(\alpha + \beta(x^2 + y^2)) \\ \sin(\alpha + \beta(x^2 + y^2)) & \cos(\alpha + \beta(x^2 + y^2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}((x^2 + y^2)^2)$$

donde  $\lambda = e^{\pm 2\pi i \alpha}$  es autovalor de  $d_0 f$ . En coordenadas polares la aplicación  $h^{-1} \circ f \circ h$  se escribe como:

$$h^{-1} \circ f \circ h(r, \theta) = (r, \theta + \alpha + \beta r^2) + \mathcal{O}(r^4).$$

Además la propiedad  $\beta \neq 0$  depende únicamente de  $f$ .

□

**Definición 5.1.2.** Decimos que un homeomorfismo  $f : [a, b] \times S^1 \rightarrow [a, b] \times S^1$  es una aplicación Twist, si para todo  $\theta \in S^1$  la función

$$[a, b] \mapsto \pi_2 \circ f(\cdot, \theta) \in S^1$$

es estrictamente monótona.

Observemos que si el coeficiente  $\beta = \beta(f)$  en la Forma Normal de Birkoff es no nulo, entonces para  $|r| \leq \epsilon$ , con  $\epsilon$  suficientemente chico,  $f$  es conjugada a una aplicación Twist en  $[0, \epsilon] \times S^1$ .

La siguiente proposición fue probada por Le Calvez en [23, pg 26].

**Proposición 5.1.3.** Sea  $f : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$  una aplicación Twist que preserva área, tal que la 1-forma  $f^*(Rd\theta) - Rd\theta$  es exacta y

- (i) todos los puntos periódicos de  $f$  son no-degenerados,
- (ii) todos los puntos heteroclínicos son transversales.

Entonces  $f$  tiene entropía topológica positiva.  $\square$

Combinando los resultados enunciados arriba con los Teoremas 3.1.2 y C, podemos probar el siguiente resultado:

**Teorema E.** Sean  $M$  una superficie cerrada y orientable y  $\Omega$  una 2-forma en  $M$ . Supongamos que el flujo magnético  $\phi_t^\Omega$  posee una órbita periódica no-hiperbólica contenida en un nivel de energía positivo  $T^cM = E^{-1}(c)$ . Entonces existe  $d\eta \in \Omega^2(M)$  de norma arbitrariamente chica en la topología  $C^r$ , con  $4 \leq r \leq \infty$ , tal que el flujo magnético  $\phi_t^{\Omega+d\eta}|_{T^cM}$  tiene entropía topológica positiva.

**Dem.:** Sea  $\theta_t = \phi_t^\Omega(\theta)$  una órbita periódica no-hiperbólica de período minimal  $T > 0$ , contenida en el nivel de energía  $T^cM = E^{-1}(c)$ . Sea  $P = P(\theta, \Sigma, \Omega)$  la aplicación de Poincaré para una sección transversal local  $\Sigma \subset T^cM$  conteniendo el punto  $\theta$ . Siendo  $\theta_t$  no-hiperbólica, tenemos que los autovalores de  $d_\theta P$  son de la forma  $e^{\pm 2\pi i \alpha}$ , con  $\alpha \in [0, 1)$ . Recordemos que la forma simpléctica Twist  $\omega(\Omega)$  induce una estructura simpléctica en  $\Sigma$  y  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$  preserva esta estructura. Por lo tanto, vía un sistema de coordenadas de Darboux, podemos suponer que  $P$  es un difeomorfismo que preserva área, definido en una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^2$  y  $P(0) = 0$ .

Sea  $Q \subset J_s^3(1)$  definido como:

$$Q = \left\{ \sigma \circ f_{\alpha, \beta} \circ \sigma^{-1} ; \sigma \in J_s^3(1), \beta > 0, \text{ y } \alpha \notin \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right\} \right\},$$

donde  $f_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  está dada por  $f_{\alpha, \beta}(r, \theta) = (r, \theta + \alpha + \beta r^2) + \mathcal{O}(r^4)$ , en coordenadas polares.

Por la Forma Normal de Birkhoff ( Teorema 5.1.1 ), el subconjunto  $Q \subset J_s^3(1)$  es abierto e invariante. Como la órbita  $\theta_t$  es no-hiperbólica, tenemos que  $jet^3(P(\theta, \Sigma, \Omega)) \in \bar{Q}$ .

Aplicando el Teorema 3.1.2, obtenemos una 2-forma exacta  $d\bar{\eta}$  arbitrariamente cercana a  $0 \in \Omega^2(M)$  en la topología  $C^r$ , con  $r \geq 4$ , tal que:  $\theta_t$  es una órbita periódica del mismo periodo para el flujo  $\phi_t^{\Omega+d\bar{\eta}}$  y  $jet^k(P(\theta, \Sigma, \Omega + d\bar{\eta})) \in Q$ .

Observemos que  $\theta_t$  es una órbita elíptica del flujo perturbado  $\phi_t^{\Omega+d\bar{\eta}}$ . Por lo tanto, por el Teorema de la Función Implícita, existe una vecindad  $\mathcal{U} \subset \Omega^2(M)$  de  $(\Omega + d\bar{\eta})$ , tal que para toda  $\bar{\Omega} \in \mathcal{U}$ , el flujo  $\phi_t^{\bar{\Omega}}|_{T^cM}$  posee una órbita periódica elíptica  $\bar{\theta}_t = \bar{\theta}_t(\bar{\Omega})$  cercana a  $\theta_t$ , la cual llamaremos *continuación analítica de  $\theta_t$* . Como  $Q$  es abierto, disminuyendo  $\mathcal{U}$ , si es necesario, podemos asumir que  $jet^3(P(\bar{\theta}, \Sigma, \bar{\Omega})) \in Q$ , para toda  $\bar{\Omega} \in \mathcal{U}$ .

Por otro lado, por el Teorema Kupka-Smale ( Teorema C ), existe un subconjunto residual  $\mathcal{O}(\Omega, c) \subset \{\bar{\Omega} \in \Omega^2(M); [\bar{\Omega}] = [\Omega]\}$  en la topología  $C^r$  tal que para toda  $\bar{\Omega} \in \mathcal{O}(\Omega, c)$  el flujo  $\phi_t^{\bar{\Omega}}|_{T^cM}$  satisface la propiedad  $P_K-S$ : todas las órbitas periódicas son no degeneradas y todos los puntos heteroclínicos son transversales.

Luego, podemos aproximar a  $d\bar{\eta}$  por una 2-forma exacta  $d\eta$ , tal que  $(\Omega + d\eta) \in \mathcal{O}(\Omega, c) \cap \mathcal{U}$ . Por lo tanto, si  $\bar{\theta}_t$  es la continuación analítica de  $\theta_t$ , entonces  $f = P(\bar{\theta}, \Sigma, \Omega + d\eta)$  satisface las condiciones (i) y (ii) de la Proposición 5.1.3, y  $jet^3(f) \in Q$ . Además, vía coordenadas de Darboux,  $f$  es un difeomorfismo en una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}^2$  que preserva la forma de área  $dx \wedge dy$ .

Por definición de  $Q$ ,  $f$  es conjugada a una aplicación Twist  $f_0 = hfh^{-1}$ , en coordenadas polares. Para aplicar la Proposición 5.1.3 vamos a hacer un cambio de coordenadas para transformar  $f_0$  en una aplicación  $T : \mathbb{R}^+ \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^1$ , tal que la 1-forma  $T^*(Rd\theta) - Rd\theta$  sea exacta, lo que completa la prueba del Teorema.

Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$(x, y) \longrightarrow (r, \theta) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}r^2, \theta\right) = (R, \theta)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{P} & \mathbb{R}^+ \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times S^1 \\ f \downarrow & & f_0 \downarrow & & \downarrow T \\ \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times S^1 \end{array}$$

donde  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ ,  $P^{-1}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Sea  $G(x, y) = (\frac{1}{2}r^2, \theta) = (R, \theta)$ . Entonces  $\lambda := G^*(Rd\theta) = \frac{1}{2}(x dy - y dx)$ . Observemos que  $d\lambda = dx \wedge dy$  es la forma de área  $\mathbb{D}$ . Siendo que  $\mathbb{D}$  es contráctil, tenemos que  $f_0^*(\lambda) - \lambda$  es exacta. Por lo tanto  $T^*(Rd\theta) - Rd\theta$  es exacta. Siendo  $R(r) = \frac{1}{2}r^2$  estrictamente creciente para  $r > 0$ , entonces  $T$  es una aplicación twist, si y solamente si  $f_0$  es una aplicación twist.  $\square$

Vamos ahora a dar algunos ejemplos de flujos magnéticos con una órbita periódica no-hiperbólica. Por lo tanto, por el Teorema E, pueden ser perturbados en la topología  $C^r$ , con  $4 \leq r \leq \infty$ , a un flujo magnético con entropía topológica positiva.

**Ejemplo 5.1.4.** Sea  $(M, g)$  una superficie cerrada. Supongamos que la curvatura escalar satisface  $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$ . Sea  $\Omega \equiv 0 \in \Omega^2(M)$ . Entonces las  $\Omega$ -geodésicas magnéticas son las

geodésicas en  $M$  en relación a la métrica  $g$ . En este caso, Thorbergsson en [39], probó la existencia de una geodésica cerrada no-hiperbólica.

**Ejemplo 5.1.5.** Sean  $B = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|^2 < 5\}$ , con la métrica euclidiana de  $\mathbb{R}^2$  y  $\Omega_0$  la forma de área correspondiente. Sea  $\eta$  una 1-forma en  $B$ , tal que  $d\eta = -\Omega_0$ . Consideremos el campo magnético exacto dado por el Lagrangiano

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle - \eta_x(v).$$

El campo de Euler-Lagrange de  $L : B \rightarrow \mathbb{R}$  puede ser visto como la expresión en coordenadas locales de un campo magnético en una superficie cerrada.

Siendo  $d\eta = -\Omega_0$ , por la ecuación 1.10, el campo de Euler-Lagrange está dado por:

$$\dot{v} = i \cdot v. \quad (5.1)$$

Fijemos el punto inicial  $p_0 = (-1, 0) \in B$  y  $v_0 = (1, 0) \in T_p^{\frac{1}{2}}B$ . Por la ecuación 5.1, tenemos que la circunferencia  $C : [0, 2\pi] \rightarrow B$ , dada en coordenadas polares por  $C(t) = (r(t), \theta(t)) = (1, \pi - t)$  es una  $d\eta$ -geodésicas magnéticas. Además todas las circunferencias obtenidas por la rotación de  $C$  con el punto  $p_0 \in C$  fijo, también son soluciones de (5.1).

Luego, si  $(p_0, v_0) \in \Sigma \subset T_p^{\frac{1}{2}}B$  es una sección transversal local, y  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$  la aplicación de Poincaré correspondiente, entonces

$$P(p_0, v) = (p_0, v), \quad \forall (p_0, v) \in \Sigma.$$

Por lo tanto, la órbita  $(C(t), \dot{C}(t))$  es degenerada, en particular no-hiperbólica. Este hecho también puede ser visto usando la ecuación (2.7). De hecho, eligiendo  $[0, 2\pi] \mapsto \Sigma_t \subset T_p^{\frac{1}{2}}B$ , tales que  $(C(t), \dot{C}(t)) \in \Sigma(t)$  y  $T_{(C(t), \dot{C}(t))} \Sigma_t \subset T_{(C(t), \dot{C}(t))} TB$  es el subespacio generado por los vectores  $(\dot{C}(t), 0)$  y  $(0, i \cdot \dot{C}(t)) \in H((C(t), \dot{C}(t))) \oplus V((C(t), \dot{C}(t)))$ , por (2.7), tenemos que  $d_{(p_0, v_0)} P$  es la matriz fundamental a tiempo  $t = 2\pi$  de la ecuación :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Luego  $d_{(p_0, v_0)} P = I$ , lo que prueba que  $(C(t), \dot{C}(t))$  es una órbita degenerada.

## 5.2. Perturbación $C^1$ de la entropía topológica

Sea  $(M, g)$  una superficie cerrada y orientable. Para cada  $c > 0$  fijo, sea  $\mathcal{R}^1(M, c)$  el subconjunto de las 2-formas  $\Omega$  en  $M$ , tales que toda  $\Omega$ -geodésica magnética cerrada de velocidad  $c$  es hiperbólica, endosado con la topología  $C^1$ .

Dado  $h \in H^2(M, \mathbb{R})$ , consideremos el subconjunto  $\mathcal{F}^1(M, c, h) \subset \Omega^2(M)$ , definido como:

$$\mathcal{F}^1(M, c, h) = \text{int}_{C^1}(\mathcal{R}^1(M, c)) \cap \{\Omega \in \Omega^2(M); [\Omega] = h\}.$$

## 5.2. PERTURBACIÓN $C^1$ DE LA ENTROPÍA TOPOLÓGICA

Recordemos que un subconjunto compacto  $\Gamma \subset T^cM = E^{-1}(c)$  e invariante por el flujo magnético  $\phi_t^\Omega|_{T^cM}$  es un *conjunto hiperbólico*, si existe una descomposición invariante (continua)

$$T_\Gamma(T^cM) = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

donde  $E^c = \langle X^\Omega \rangle$  ( subespacio generado por el campo) y existen constantes  $C > 0$  y  $0 < \lambda < 1$ , tales que:

- (a)  $|d_\theta \phi_t^\Omega(\xi)| \leq C\lambda^t |\xi|$ ,  $\forall t > 0, \theta \in \Gamma, \xi \in E^s$ ,
- (b)  $|d_\theta \phi_{-t}^\Omega(\xi)| \leq C\lambda^t |\xi|$ ,  $\forall t > 0, \theta \in \Gamma, \xi \in E^u$ .

Dado  $\Omega \in \mathcal{F}^1(M, c, h)$ , sea  $Per(\Omega, c)$  el conjunto de unión de todas las órbitas periódicas hiperbólicas de período minimal del flujo  $\phi_t^\Omega|_{T^cM}$ . Por definición tenemos que  $\overline{Per(\Omega, c)} \subset T^cM$  es un subconjunto compacto e invariante por el flujo  $\phi_t^\Omega|_{T^cM}$ .

**Teorema F.** Sean  $c > 0$  y  $\Omega \in \mathcal{F}^1(M, c, [\Omega])$ . Entonces  $\overline{Per(\Omega, c)} \subset T^cM$  es un conjunto hiperbólico.

La prueba de este teorema será dada en la sección 5.2.3. Para esto vamos a combinar nuestra versión del Lema de Franks para flujos magnéticos en superficies con otros resultados de [9] y [25], de los cuales haremos una breve discusión en las 2 siguientes secciones. Vamos ahora a estudiar las consecuencias del Teorema F.

Un conjunto hiperbólico se dice *localmente maximal*, si existe una vecindad abierta  $U$  de  $\Gamma$ , tal que  $\Gamma$  es el subconjunto maximal invariante de  $U$ , i.e.,

$$\Gamma = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_t^\Omega(U).$$

Un *conjunto hiperbólico básico* es un conjunto hiperbólico maximal con una órbita densa, y le decimos *no trivial* cuando este no es una única órbita periódica. Un hecho bien conocido es que un conjunto hiperbólico básico no trivial posee entropía topológica positiva (cf. [5]).

De un modo general, dado un flujo continuo  $\phi_t$  en un espacio topológico  $X$ , decimos que un punto  $x \in X$  es *no-errante* si para toda vecindad  $V \subset X$  de  $x$ , existe  $T > 0$ , tal que  $\phi_T(V) \cap V \neq \emptyset$ . Denotemos por  $\Omega(\phi|_X)$  el conjunto de todos los puntos no-errantes de  $\phi_t|_X$ .

**Corolario 5.2.1.** Sean  $c > 0$  y  $\Omega \in \mathcal{F}^1(M, c, [\Omega])$ . Supongamos que el número de órbitas periódicas de período minimal del flujo magnético  $\phi_t^\Omega|_{T^cM}$  es infinito. Entonces  $\overline{Per(\Omega, c)}$  contiene un conjunto básico no trivial. En particular  $\phi_t^\Omega|_{T^cM}$  tiene entropía topológica positiva.

**Dem.:** Sea  $\Gamma = \overline{Per(\Omega, c)}$ . Ya que  $\Omega \in \mathcal{F}^1(M, c)$ , entonces, por el Teorema F, el conjunto  $\Gamma$  es hiperbólico.

Inicialmente observemos que  $\Gamma$  es localmente maximal. De hecho, usando la Proposición 6.4.6 en [19], tenemos que existe una vecindad abierta  $U$  de  $\Gamma$ , tal que el conjunto

$$\Gamma_U = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_t^\Omega(U)$$

es hiperbólico. Por definición, tenemos que  $\Gamma_U$  es localmente maximal. Siendo que  $\Omega(\phi_t^\Omega|_\Gamma) = \Gamma$ , y que  $\Gamma \subset \Gamma_U$ , tenemos que  $\Gamma = \Omega(\phi_t^\Omega|_\Gamma) \subset \Omega(\phi_t^\Omega|_{\Gamma_U})$ . Por el Corolario 6.4.20 en [19], las órbitas periódicas son densas en el conjunto no-errante  $\Omega(\phi_t^\Omega|_{\Gamma_U})$ . Así  $\Omega(\phi_t^\Omega|_{\Gamma_U}) \subset \overline{\text{Per}(\Omega, c)} = \Gamma$ . Por lo tanto  $\Gamma = \Gamma_U$ , lo que prueba que  $\Gamma$  es localmente maximal.

Siendo  $\Gamma$  localmente maximal, por el Teorema de la Descomposición Espectral de Smale [37] (ver también [19]), tenemos que  $\Gamma$  se descompone en una colección finita de conjuntos básicos  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ , tal que el conjunto no-errante de la restricción  $\phi_t^\Omega|_\Gamma$  satisface:

$$\Omega(\phi_t^\Omega|_\Gamma) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i.$$

Ya que el número de órbitas periódicas en  $\Gamma$  es infinito, por lo menos uno de los básicos  $\Gamma_i$  no es únicamente una órbita periódica y por lo tanto no-trivial.  $\square$

Combinando el Teorema E y el Corolario 5.2.1, obtenemos:

**Teorema G.** Sean  $M$  una superficie cerrada orientable y  $\Omega$  una 2-forma en  $M$ . Supongamos que el flujo magnético  $\phi_t^\Omega$  posee infinitas órbitas periódicas de período minimal, contenidas en un nivel de energía positivo  $T^c M = E^{-1}(c)$ . Entonces existe una 2-forma exacta  $d\eta \in \Omega^2(M)$  de norma arbitrariamente chica, en la topología  $C^1$ , tal que el flujo magnético  $\phi_t^{(\Omega+d\eta)}|_{T^c M}$  tiene entropía topológica positiva.

**Dem.:** Si  $\Omega \in \mathcal{F}^1(M, c, [\Omega])$ , entonces por el Corolario 5.2.1, el flujo  $\phi_t^\Omega|_{T^c M}$  tiene entropía topológica positiva, lo que prueba el Teorema con  $d\eta \equiv 0$ . Supongamos que  $\Omega \notin \mathcal{F}^1(M, c, [\Omega])$ , entonces existe  $d\bar{\eta} \in \Omega^2(M)$ ,  $C^1$ -arbitrariamente cercana a  $0 \in \Omega^2(M)$ , tal que  $\phi_t^{(\Omega+d\bar{\eta})}|_{T^c M}$  posee una órbita periódica no-hiperbólica. Aplicando el Teorema 5.2.1, tenemos que existe una 2-forma exacta  $d\eta \in \Omega^2(M)$ ,  $C^1$ -arbitrariamente cercana a  $0 \in \Omega^2(M)$ , tal que el flujo  $\phi_t^{(\Omega+d\bar{\eta}+d\eta)}|_{T^c M}$  tiene entropía topológica positiva, lo que completa la prueba del Teorema.  $\square$

Sea  $p: M^u \rightarrow M$  el recubrimiento universal de  $M$ . Dado un punto  $x \in M^u$  y  $T > 0$ , definimos la bola magnética de centro  $x$  y rayo  $T$  como el subconjunto dado por:

$$B_{mag}(\Omega, c, x, T) := \{y \in M^u \ ; \ \text{existe una } \Omega\text{-geodésica magnética de } x \text{ a } y \text{ con longitud } < T \text{ y velocidad } c \}.$$

Sea  $\text{Vol } B_{mag}(\Omega, c, x, T)$  el volumen riemanniano de  $B_{mag}(\Omega, c, x, T)$ . La aplicación

$$x \mapsto \text{Vol } B_{mag}(\Omega, c, x, T)$$

es invariante por aplicaciones de recubrimientos (cf. [6, pg. 17]), por lo tanto define una aplicación en  $M$ , a la cual denotaremos del mismo modo. El siguiente resultado fue probado por Bruns y Paternain en [6, Teorema D].

**Teorema 5.2.2.** Sea  $h_v(\Omega, c)$  la tasa de crecimiento exponencial de las bolas magnéticas, i.e.

$$h_v(\Omega, c) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \int_M \text{Vol } B_{mag}(\Omega, c, x, T) dx.$$

Entonces

$$h_v(\Omega, c) \leq h_{top}(\Omega, c).$$

Si  $\phi_t^\Omega|_{T^c M}$  es Anosov, entonces vale la igualdad.  $\square$

Si  $\Omega$  es una 2-forma débilmente exacta en  $M$ , i.e. existe una 1-forma  $\eta$  en  $M^u$  tal que  $p^*\Omega = d\eta$ , podemos definir el valor crítico del flujo magnético asociado a  $\Omega$  [6] y [27, 10], como:

$$c(\Omega) := \inf\{k \in \mathbb{R}; A_{L+k}(\gamma) \geq 0 \text{ para toda curva cerrada } \gamma \text{ absolutamente continua}\},$$

donde  $L: TM^u \rightarrow \mathbb{R}$  denota el lagrangiano correspondiente al levantamiento del flujo  $\phi_t^\Omega$  al recubrimiento universal de  $M$ . La prueba de la siguiente proposición también puede ser vista en [6, Prop. 5.4].

**Proposición 5.2.3.** Supongamos que  $c > c(\Omega)$ . Entonces  $h_v(\Omega, c)$  es positivo, si y solamente si  $\pi_1(M)$  tiene crecimiento exponencial.  $\square$

**Observación 5.2.4.** En dimensión 2, es un hecho bien conocido que el grupo fundamental de  $M$  tiene crecimiento exponencial, si y solamente si  $M$  es una superficie de genero  $g \geq 2$ . Por lo tanto, combinando la Proposición 5.2.3 y el Teorema 5.2.2, tenemos que si  $M$  es una superficie de genero  $g \geq 2$ , entonces  $h_{top}(\Omega, c) > 0$ , para toda 2-forma  $\Omega$  en  $M$  y para todo  $c > c(\Omega)$ .

Cuando  $\Omega = d\eta$ , el campo magnético exacto asociado a  $d\eta$  coincide con el flujo de Euler-Lagrange para el lagrangiano convexo y superlineal  $L_\eta: TM \rightarrow \mathbb{R}$ , definido como:

$$L_\eta(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v) - \eta_x(v).$$

Recordemos que el valor crítico estricto de Mañé [27, 10] y [32], puede ser definido como:

$$c_0(L_\eta) = \inf\{k \in \mathbb{R}; A_{L_\eta+k}(\Gamma) \geq 0 \text{ para toda curva cerrada absolutamente continua homóloga a cero}\}.$$

Observe que por la desigualdad A.2, vale  $c(\Omega) \leq c_0(L)$ .

Para una superficie  $M$  arbitraria sabemos que la restricción del flujo magnético al nivel de energía  $T^c M$ , con  $c > c_0(L_\eta)$ , puede ser visto como una reparametrización de un flujo geodésico en el fibrado tangente unitario para una apropiada métrica Finsler (cf. [8]).

Una *métrica Finsler* es una función  $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable fuera de la sección cero, tal que la derivada segunda de  $F^2$  en la dirección de las fibras es positiva definida y  $F(x, \lambda v) = \lambda F(x, v)$  para todo  $\lambda > 0$  y  $(x, v) \in TM$ . Decimos que una métrica Finsler es *simétrica*, si cumple  $F(x, v) = F(x, -v)$ , para todo  $(x, v) \in TM$  y decimos que es *bumpy*, si toda geodésica cerrada es no-degenerada. Si  $g$  es una métrica riemanniana en  $M$ , entonces  $F(x, v) = g_x(v, v)^{1/2}$  es un ejemplo de una métrica Finsler simétrica en  $M$ .

Varios resultados de flujos geodésicos para una métrica Riemanniana siguen siendo válidos para métricas Finsler. Pero en contraste con el caso riemanniano, existen ejemplos de métricas Finsler bumpy non-simétricas en  $S^2$ , con sólo dos geodésicas cerradas. Estos ejemplos son debido a Katok [18], y estudiados geoméricamente por Ziller en [40].

El siguiente teorema fue probado por Radamacher en [34, Teorema 3.1(b)] para flujos geodésicos en una variedad compacta simplemente conexa satisfaciendo cierta condición sobre el álgebra de cohomología racional  $H^*(M, \mathbb{Q})$ . Tal condición se verifica en el caso en que  $M = S^2$  y el teorema sigue siendo válido para métricas Finsler bumpy (cf. [34, pg. 81]). Por lo tanto, para simplificar la notación podemos enunciarlo como:

**Teorema 5.2.5.** *Sea  $F : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una métrica Finsler Bumpy en  $S^2$ . Supongamos que existe sólo un número finito de geodésicas cerradas para  $F$  en  $S^2$ . Entonces existe una geodésica cerrada elíptica, en particular no-hiperbólica.*  $\square$

Luego, combinando el Teorema 5.2.5 con los Teoremas A, E y G, tenemos que:

**Proposición H.** *Sea  $\Omega = d\eta$  una 2-forma exacta en  $S^2$ . Entonces, para cada  $c > c_0(L_\eta)$  existe una 2-forma exacta  $d\eta \in \Omega^2(S^2)$  de norma arbitrariamente chica en la topología  $C^1$ , tal que el flujo magnético  $\phi_t^{(\Omega+d\eta)}|_{T^c M}$  tiene entropía topológica positiva.*  $\square$

En el caso del toro bidimensional  $T^2$ , podemos usar el siguiente Teorema, cuya prueba puede ser vista en [26].

**Teorema 5.2.6.** (Teorema de Tonelli para curvas cerradas) *Sea  $L$  un lagrangiano convexo y superlineal en una variedad cerrada  $M$ . Entonces dado  $l \in H_1(M, \mathbb{Z})$ , para cada  $a > 0$ , existe una órbita cerrada  $(\gamma, \dot{\gamma}) : [0, a] \rightarrow TM$ , tal que:*

$$[\gamma] = l \quad \text{y} \quad A_L(\gamma) \leq A_l(a),$$

para toda curva absolutamente continua  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  con  $[\alpha] = l$ .

Siendo  $H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ , aplicando el Teorema 5.2.6 al lagrangiano definido como  $L = F^2$ , donde  $F$  es una métrica Finsler, concluimos que existen infinitas geodésicas cerradas

(una para cada clase de homología). Por lo tanto, por el Teorema de Tonelli y Teorema G, tenemos:

**Proposición I.** *Sea  $\Omega = d\eta$  una 2-forma exacta en  $T^2$ . Entonces, para cada  $c > c_0(L_\eta)$  existe una 2-forma exacta  $d\eta \in \Omega^2(T^2)$  de norma arbitrariamente chica en la topología  $C^1$ , tal que el flujo magnético  $\phi_t^{(\Omega+d\eta)}|_{T^c M}$  tiene entropía topológica positiva.*  $\square$

En el Apéndice A, usando los resultados de [29], [11] y [28], vamos a extender el resultado de la Proposición I para perturbaciones en la topología  $C^\infty$ .

### 5.2.1. Acción simpléctica parcialmente hiperbólica

Un haz vectorial simpléctico  $\pi : E \rightarrow B$  es un haz vectorial cuyas aplicaciones de transición preservan la estructura simpléctica canónica de  $\mathbb{R}^{2n}$  en las fibras. Sea  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow Sp(E)$  una acción continua, tal que  $\Psi_t : E \rightarrow E$  preserva la fibra y  $\Psi_{s+t} = \Psi_s \circ \Psi_t$ . La acción  $\Psi$  induce un flujo  $\psi_t : B \rightarrow B$ , tal que  $\psi_t \circ \pi = \pi \circ \Psi_t$ .

Decimos que una acción  $\Psi$  es *parcialmente hiperbólica* si existe una descomposición invariante  $E = S \oplus U$ ,  $T > 0$  y  $0 < \lambda < 1$ , tal que:

$$\|\Psi_T|_{S(b)}\| \cdot \|\Psi_{-T}|_{S(\psi_t(b))}\| \leq \lambda, \quad \forall b \in B, \quad (5.2)$$

y decimos que  $\Psi$  es *hiperbólica* si existe una descomposición  $E = E^s \oplus E^u$ ,  $C > 0$  y  $\lambda > 0$ , tal que:

$$(1) \quad |\Psi_t(\xi)| \leq Ce^{-\lambda t}|\xi|, \quad \forall t > 0, \xi \in E^s,$$

$$(2) \quad |\Psi_{-t}(\xi)| \leq Ce^{-\lambda t}|\xi|, \quad \forall t > 0, \xi \in E^u.$$

La condición de dominación (5.2), implica que la descomposición  $E = S \oplus U$  es continua. Una acción hiperbólica es claramente parcialmente hiperbólica. El siguiente teorema fue probado por Contreras en [9].

**Teorema 5.2.7.** ([9, Corolario 2]) *Una acción simpléctica parcialmente hiperbólica, con  $\dim(S) = \dim(U)$  y base  $B$  compacta, es hiperbólica.*  $\square$

### 5.2.2. Sucesiones periódicas de aplicaciones simplécticas lineales

Una aplicación Lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es *hiperbólica* si  $T$  no posee autovalor de norma 1. Los subespacios estables e inestables de  $T$  son definidos como:

$$E^s(T) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n; \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(v) = 0 \right\},$$

$$E^u(T) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n; \lim_{n \rightarrow \infty} T^{-n}(v) = 0 \right\},$$

respectivamente.

Sea  $GL(n)$  el grupo de los isomorfismos lineales de  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que una sucesión  $\xi: \mathbb{Z} \rightarrow GL(n)$  es *periódica* si existe  $n_0 \in \mathbb{Z}$ , tal que  $\xi_{i+n_0} = \xi_i$ , para todo  $i \in \mathbb{Z}$ . Decimos que una sucesión periódica  $\xi$  es *hiperbólica* si la aplicación lineal  $\prod_{i=0}^{n_0-1} \xi_i$  es hiperbólica, en este caso vamos a denotar los espacios estables e inestables de  $\prod_{i=0}^{n_0-1} \xi_{j+i}$  por  $E_j^s(\xi)$  y  $E_j^u(\xi)$ , respectivamente.

Dadas dos familias de sucesiones periódicas en  $GL(n)$ , digamos  $\xi_\alpha = \{\xi(\alpha); \alpha \in \mathcal{A}\}$  y  $\eta_\alpha = \{\eta(\alpha); \alpha \in \mathcal{A}\}$ , definimos:

$$d(\xi_\alpha, \eta_\alpha) = \sup\{\|\xi_n(\alpha) - \eta_n(\alpha)\|; \alpha \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Decimos que dos familias periódicas en  $GL(n)$  son *periódicamente equivalentes* si tienen el mismo conjunto de índices  $\mathcal{A}$  y para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ , el periodo minimal de  $\xi(\alpha)$  y  $\eta(\alpha)$  coinciden. Decimos que una familia  $\xi_\alpha$  es una *familia periódica hiperbólica* si para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , la sucesión periódica  $\xi(\alpha)$  es hiperbólica. Finalmente, decimos que una familia periódica hiperbólica  $\xi_\alpha$  es *estable* si existe  $\epsilon > 0$ , tal que toda familia periódicamente equivalente  $\eta_\alpha$ , satisfaciendo  $d(\xi_\alpha, \eta_\alpha) < \epsilon$ , es hiperbólica.

El siguiente resultado fue probado por Mañé en [25].

**Lema 5.2.8.** ([25, Lemma II.3]) *Sea  $\xi_\alpha = \{\xi(\alpha); \alpha \in \mathcal{A}\}$  una familia periódica hiperbólica estable de sucesiones periódicas en  $GL(n)$ . Entonces existen constantes  $m \in \mathbb{N}$  y  $0 < \lambda < 1$ , tal que para toda  $\alpha \in \mathcal{A}$  y  $j \in \mathbb{Z}$ , vale:*

$$\left\| \left( \prod_{i=0}^{m-1} \xi_{i+j}(\alpha) \right) \Big|_{E_j^s(\xi(\alpha))} \right\| \cdot \left\| \left( \prod_{i=0}^{m-1} \xi_{i+j}(\alpha) \right)^{-1} \Big|_{E_{j+m}^u(\xi(\alpha))} \right\| \leq \lambda.$$

□

Sea  $Sp(1) = SL(2)$  el subgrupo de  $GL(2)$  dado por las aplicaciones lineales simplécticas en  $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$ . En [12], Contreras y Paternain probaron que si una familia de sucesión periódica  $\xi_\alpha$  en  $Sp(1)$  es hiperbólica estable entre las sucesiones en  $Sp(1)$  y  $\sup_\alpha \|\xi(\alpha)\| < \infty$ , entonces  $\xi_\alpha$  también es estable como familia de sucesiones periódicas de  $GL(2)$ . Así, tenemos:

**Corolario 5.2.9.** ([12, Corolario 5.2]) *Sea  $\xi_\alpha = \{\xi(\alpha); \alpha \in \mathcal{A}\}$  una familia periódica hiperbólica estable de sucesiones periódicas en  $Sp(1)$  con  $\sup_\alpha \|\xi(\alpha)\| < \infty$ . Entonces existen constantes  $m \in \mathbb{Z}^+$  y  $0 < \lambda < 1$ , tales que para toda  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , vale:*

$$\left\| \left( \prod_{i=0}^{m-1} \xi_{i+j}(\alpha) \right) \Big|_{E_j^s(\xi(\alpha))} \right\| \cdot \left\| \left( \prod_{i=0}^{m-1} \xi_{i+j}(\alpha) \right)^{-1} \Big|_{E_{j+m}^u(\xi(\alpha))} \right\| \leq \lambda.$$

□

**Observación 5.2.10.** Sea  $T_j^N = \prod_{i=0}^{N-1} \xi_{i+j}(\alpha)$ . Usando que  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ , para toda  $A, B \in GL(n)$ , tenemos que para todo  $N > 1$  y para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , vale:

$$\left\| T_j^{mN} \Big|_{E_j^s(\xi(\alpha))} \right\| \cdot \left\| (T_j^{mN})^{-1} \Big|_{E_{j+mN}^u(\xi(\alpha))} \right\| \leq \lambda^N.$$

### 5.2.3. Demostración del Teorema F

Sea  $c > 0$  fijo y  $U \subset T^c M$  abierto. Sea  $\mathcal{R}^1(U)$  el subconjunto de las 2-formas  $\Omega$  en  $M$ , tales que todas las órbitas periódicas de  $\phi_t^\Omega$  enteramente contenidas en  $U$  son hiperbólicas, endosado con la topología  $C^1$ . Dado  $h \in H^2(M, \mathbb{R})$ , consideremos el subconjunto  $\mathcal{F}^1(U, h) \subset \Omega^2(M)$  definido como:

$$\mathcal{F}^1(U, h) = \text{int}_{C^1}(\mathcal{R}^1(U)) \cap \{\Omega \in \Omega^2(M); [\Omega] = h\}.$$

Dado  $\Omega \in \mathcal{F}^1(U)$ , sea  $Per(\Omega, U)$  el conjunto de todas las órbitas periódicas hiperbólicas de periodo minimal del flujo  $\phi_t^\Omega|_{T^c M}$  enteramente contenidas en  $U$ . La siguiente proposición es una versión local que implica el Teorema F.

**Proposición 5.2.11.** *Sea  $\Omega \in \mathcal{F}^1(U, [\Omega])$ . Entonces  $\overline{Per(\Omega, U)} \subset T^c M$  es un conjunto hiperbólico.*

**Dem.:** Como  $\Omega \in \mathcal{F}^1(U, [\Omega])$ , tenemos que si  $\mathcal{U} \subset \{\bar{\Omega} \in \Omega^2(M); [\bar{\Omega}] = [\Omega]\}$  es una  $C^1$ -vecindad de  $\Omega$  suficientemente chica, entonces cada órbita de  $Per(\Omega, U)$  puede ser continuada y su continuación analítica es hiperbólica, pues caso contrario podríamos producir una órbita no-hiperbólica.

Para cada  $\theta = (x, v) \in T^c M$ , sea  $\mathcal{N}(\theta) \subset T_\theta T^c M$  definido como:

$$\mathcal{N}(\theta) = \{\xi \in T_\theta T^c M; g_x(d\pi(\xi), v) = 0\}.$$

Siendo  $d_\theta \pi(X^\Omega(\theta)) = v$  (igualdad (1.5)), tenemos que  $\mathcal{N}(\theta)$  es transversal al campo  $X^\Omega$  en el punto  $\theta$ . Luego

$$T_\theta T^c M = \mathcal{N}(\theta) \oplus \langle X^\Omega(\theta) \rangle,$$

y por lo tanto, la restricción de la forma simpléctica  $\omega_\theta(\Omega)$  en  $\mathcal{N}(\theta)$  es no degenerada. Note que, por definición,  $\mathcal{N}(\theta)$  no depende de la 2-forma  $\Omega$ .

Sea  $K = K(\Omega, c)$  dado por el Lema 1.3.1. Dado  $\phi_{t_0}^\Omega(\theta) = (\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) \in Per(\Omega, U)$ , denotemos por  $T_\theta$  su periodo minimal. Sea  $n = n(\theta, \Omega) \in \mathbb{N}$ , tal que  $T_\theta = n t_0$  para algún  $t_0 \in (\frac{K}{2}, K]$ . Para cada  $0 \leq i \leq n-1$ , definimos el segmento  $\gamma_i = \gamma(it_0 + t)$ . Observemos que, por el Lema 1.3.1,  $\gamma_i: [0, t_0] \rightarrow U$  es inyectiva. Sean  $\Sigma_i \in TU$  secciones transversales locales en los puntos  $\phi_{it_0}^\Omega(\theta)$  de la órbita  $\phi_t^\Omega(\theta)$ , tales que  $T_{\phi_{it_0}^\Omega(\theta)} \Sigma_i = \mathcal{N}(\phi_{it_0}^\Omega(\theta))$ . Denotemos por

$$S_{i,\theta} = dP(\Omega, \Sigma_i, \Sigma_{(i+1)}) : \mathcal{N}(\phi_{it_0}^\Omega(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(\phi_{(i+1)t_0}^\Omega(\theta))$$

la aplicación de Poincaré linealizada. Observemos que si  $\bar{\Omega} \in \mathcal{U}$ , denotando por  $\bar{\theta}_t = \bar{\theta}_t(\bar{\Omega})$  la continuación analítica de  $\theta_t = \phi_t^\Omega(\theta)$ , entonces  $\bar{\theta}_t$  intersecta las secciones  $\Sigma_i$ ,  $0 \leq i \leq n(\theta)$ , y por lo tanto, la podemos cortar en el mismo número de segmentos de órbitas que  $\theta_t$ . Luego la familia

$$\xi(\bar{\Omega}) = \left\{ S_{i, \bar{\theta}_t}(\bar{\Omega}); \phi_t^\Omega(\theta) \in Per(\Omega, U) \text{ y } 0 \leq i \leq n = n(\theta, \Omega) \right\}, \quad (5.3)$$

con  $\bar{\Omega} \in \mathcal{U}$  y  $\phi_t^\Omega(\theta) \in Per(\Omega, U)$  fija, es una familia periódicamente equivalente. El siguiente lema es consecuencia del Corolario 4.1.2, cuya prueba la dejamos para el final de esta sección.

**Lema 5.2.12.** Si  $\Omega \in \mathcal{F}^1(U, [\Omega])$ , entonces  $\xi(\Omega)$  es hiperbólica estable.

Aplicando el Corolario 5.2.9 y la observación 5.2.10, si es necesario, tenemos que existe  $0 < \lambda < 1$  y  $T > 0$ , tales que:

$$\|d_\theta P_T|_{E^s(\theta)}\| \cdot \|d_{\theta_T} P_{-T}|_{E^u(\theta_T)}\| \leq \lambda, \quad (5.4)$$

para toda  $\theta_t = \phi_t^\Omega(\theta) \in \text{Per}(\Omega, U)$ , donde  $P_T = P(\Omega, \Sigma_0, \Sigma_T)$ .

Sea  $\Gamma(U) = \overline{\text{Per}(\Omega, U)}$ . Para cada punto  $\theta \in \Gamma(U)$ , sea

$$S(\theta) := \left\{ \xi \in \mathcal{N}(\theta); \begin{array}{l} \exists \{\theta_n\} \subset \text{Per}(\Omega, U), \text{ con } \lim_n \theta_n = \theta \text{ y} \\ \exists \xi_n \in E^s(\theta_n), \text{ tal que, } \lim_n \xi_n = \xi \end{array} \right\}$$

$$U(\theta) := \left\{ \xi \in \mathcal{N}(\theta); \begin{array}{l} \exists \{\theta_n\} \subset \text{Per}(\Omega, U), \text{ con } \lim_n \theta_n = \theta \text{ y} \\ \exists \xi_n \in E^u(\theta_n), \text{ tal que, } \lim_n \xi_n = \xi \end{array} \right\}.$$

Entonces la condición de dominación uniforme (5.4) implica que

$$\|d_\theta P_T|_{S(\theta)}\| \cdot \|d_{\theta_T} P_{-T}|_{U(\theta_T)}\| \leq \lambda, \quad (5.5)$$

para todo punto  $\theta \in \Gamma(U)$ .

Vamos ahora a verificar que (5.5) implica que  $S \oplus U$  es una descomposición continua del haz  $\mathcal{N}|_U$ . Inicialmente observemos que  $S(\theta) \cap U(\theta) = \{0\}$ , para toda  $\theta \in \Gamma(U)$ . De hecho, si  $\xi \in S(\theta) \cap U(\theta)$ , entonces

$$\|d_\theta P_T(\xi)\| \leq \|d_\theta P_T|_{S(\theta)}\| \cdot \|\xi\| \leq \|d_\theta P_T|_{S(\theta)}\| \cdot \|d_{\theta_T} P_{-T}|_{U(\theta_T)}\| \cdot \|d_\theta P_T(\xi)\| \leq \lambda \|d_\theta P_T(\xi)\|,$$

y como  $\lambda < 1$ , tenemos que obligatoriamente  $\xi = 0$ . Por las definiciones de  $U$  y  $S$ , tenemos que  $\dim S(\theta) \geq E^s(\theta_n)$  y  $\dim U(\theta) \geq E^u(\theta_n)$ , donde  $\lim_n \theta_n = \theta$ , y  $\theta_n \in \text{Per}(\Omega, U)$ . Por lo tanto  $\mathcal{N}(\theta) = S(\theta) \oplus U(\theta)$ ,  $\lim_n S(\theta_n) = S(\theta)$  y  $\lim_n U(\theta_n) = U(\theta)$  en la apropiada variedad Grassmanniana.

Ya que  $dP_{s+t} = dP_s \circ dP_t$  y por (5.5), tenemos que  $dP : \mathcal{N}|_{\Gamma(U)} \rightarrow \mathcal{N}|_{\Gamma(U)}$  es una acción simpléctica parcialmente hiperbólica. La continuidad de los subhaces  $S$  y  $U$  y sus definiciones implica que  $S(\theta) = E^s(\theta)$  y  $U(\theta) = E^u(\theta)$ , para toda  $\theta \in \text{Per}(\Omega, U)$ . Luego  $\dim S = \dim U = 1$ . Por el Teorema 5.2.7,  $dP$  es una acción simpléctica hiperbólica en  $\mathcal{N}|_{\Gamma(U)}$ .

Sea

$$\Lambda(\theta) : \mathcal{N}(\theta) \oplus \langle X^\Omega(\theta) \rangle \longrightarrow \mathcal{N}(\theta)$$

la proyección canónica. Observemos que por la igualdad 2.5, vale:

$$dP = \Lambda \circ d\phi^\Omega|_{\mathcal{N}|_{\Gamma(U)}}.$$

Usando los métodos de Hirsch-Pugh-Shub en [24], tenemos que la hiperbolicidad de la acción  $dP$  en  $\mathcal{N}|_{\Gamma(U)}$  implica que  $\Gamma(U)$  es un conjunto hiperbólico para el flujo  $\phi_t^\Omega$ . Vamos a dar sólo las ideas de la prueba de esta implicación.

Siendo  $dP$  hiperbólica, entonces existe una descomposición  $\mathcal{N}|_{\Gamma(U)} = \mathcal{E}^s \oplus \mathcal{E}^u$ ,  $C > 0$  y  $\lambda > 0$ , tal que:

- (1)  $|dP_t(\xi)| \leq Ce^{-\lambda t}|\xi|$ ,  $\forall t > 0$ ,  $\xi \in \mathcal{E}^s$ ,
- (2)  $|dP_{-t}(\xi)| \leq Ce^{-\lambda t}|\xi|$ ,  $\forall t > 0$ ,  $\xi \in \mathcal{E}^u$ .

Definimos

$$\mathcal{F} = \{L : \mathcal{E}^U \rightarrow \mathbb{R}, L(\theta) : \mathcal{E}^U(\theta) \rightarrow \mathbb{R} \text{ es lineal } \forall \theta \in \Gamma(U)\},$$

con  $\|L\| = \sup_{\xi \in \{\mathcal{E}^U - 0\}} \frac{|L(\xi)|}{|\xi|}$ . Para cada  $L \in \mathcal{F}$ , asociamos el subhaz  $W_L$  de  $T_{\Gamma(U)}T^cM$ , dado por:

$$W_L(\theta) = \text{Graf}(L(\theta)) = \{\xi + (L(\theta) \cdot \xi)X^\Omega(\theta); \xi \in \mathcal{E}^U(\theta)\}.$$

Sea  $t_0 > 0$ , tal que  $Ce^{-\lambda t_0} < e^{-\lambda} < 1$ . Consideremos la siguiente transformación del gráfico  $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , correspondiente a  $W_T(L) = d\phi_{t_0}^\Omega(W_L)$  y definida por

$$d\phi_{t_0}^\Omega(W_L) = d_\theta P_{t_0}(\xi) + [T(L)(d_\theta P_{t_0}(\xi))]X^\Omega(\phi_{t_0}^\Omega(\theta)), \quad \theta \in \Gamma(U) \text{ y } \xi \in \mathcal{E}^U(\theta).$$

Afirmamos que  $T$  es una contracción. De hecho,

$$\begin{aligned} \left| \frac{T(L_1 - L_2)(d_\theta P_{t_0}(\xi))}{\|d_\theta P_{t_0}(\xi)\|} \right| \|X^\Omega(\phi_{t_0}^\Omega(\theta))\| &\leq \frac{d_\theta \phi_{t_0}^\Omega[L_1(\xi) - L_2(\xi)]X^\Omega(\theta)}{e^\lambda \|\xi\|} \leq \\ &\leq \frac{|(L_1 - L_2)(\xi)|}{e^\lambda \|\xi\|} \|X^\Omega(\phi_{t_0}^\Omega(\theta))\|. \end{aligned}$$

Luego  $\|T(L_1 - L_2)\| \leq e^\lambda \|L_1 - L_2\|$ . Sea  $L_0$  el punto fijo de  $T$ . Definimos  $E^u = W_{L_0}$ . Entonces  $E^u$  es invariante por  $d\phi_t^\Omega$ . Más aún, si  $\zeta \in E^u(\theta)$ , entonces  $\zeta = \xi + (L_0(\theta) \cdot \xi)X^\Omega(\theta)$ , con  $\xi = \Lambda(\theta)(\zeta) \in \mathcal{E}^u(\theta)$ . Ya que  $L_0$  es continua, existe  $Q_1 > 0$ , tal que  $|\zeta| \leq Q_1|\xi| = Q_1|\Lambda\zeta|$ , para todo  $\zeta \in \mathcal{E}^u$ . Como  $\mathcal{N}(\theta)$  y  $X^\Omega(\theta)$  son subhaces transversales y continuos de  $T_{\Gamma(U)}T^cM$ , entonces el ángulo  $\angle(X^\Omega(\theta), \mathcal{N}(\theta))$  está limitado inferiormente y existe  $Q_2 > 0$ , tal que  $\frac{1}{Q_2}|\Lambda\zeta| = \frac{1}{Q_2}|\xi| < \|\zeta\|$ . Entonces

$$\begin{aligned} |d_\theta \phi_t(\zeta)| &= |d_\theta P_t(\xi) + (T(L_0) \cdot \xi)X^\Omega(\theta)| \geq \\ &\geq \frac{1}{Q_2}|d_\theta P_t(\xi)| \geq \frac{C^{-1}e^{\lambda t}}{Q_2}|\xi| \geq \frac{C^{-1}e^{\lambda t}}{Q_1 Q_2}|\zeta|. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\dim E^u = \dim \text{Graf}(L_0) = \dim \mathcal{E}^u = 1.$$

La existencia de un subhaz estable fuerte de dimensión 1 es probada de modo similar.  $\square$

**Demostración del lema 5.2.12**

Puesto que  $\Omega \in \mathcal{F}^1(U, [\Omega])$ , existe una  $C^1$ -vecindad de  $\mathcal{U} \subset \{\bar{\Omega} \in \Omega^2(M); [\bar{\Omega}] = [\Omega]\}$  suficientemente chica, tal que para toda  $\bar{\Omega} \in \mathcal{U}$  la familia  $\xi(\bar{\Omega})$  es hiperbólica. Sea  $\delta(\Omega, \mathcal{U}, c) > 0$ , dado por el Corolario 4.1.2. Supongamos que la familia hiperbólica

$$\xi(\Omega) = \{S_i(\theta_t) = S_{i,\theta} : \mathcal{N}(\theta_{it_0}) \rightarrow \mathcal{N}(\theta_{(i+1)t_0}); \theta_t \in \text{Per}(\Omega, U), 0 \leq i \leq n(\theta_t)\}$$

no es estable. Entonces existe una órbita periódica  $\theta_t \in \text{Per}(\Omega, U)$  y una sucesión de aplicaciones simplécticas lineales  $\eta_i : \mathcal{N}(\theta_{it_0}) \rightarrow \mathcal{N}(\theta_{(i+1)t_0})$ , tales que:

$$\|S_i(\theta_t) - \eta_i\| > \delta \quad \text{y} \quad \prod_{i=0}^{n(\theta_t)} \eta_i \quad \text{no es hiperbólica.}$$

Observemos que el espacio de perturbación en el Lema de Franks ( Teorema 4.1.1 ) preserva la órbita seleccionada  $\theta_t$ . Por el Corolario 4.1.2, existe una 2-forma  $\bar{\Omega} \in \mathcal{U}$ , tal que  $\theta_t$  también es una órbita periódica para el flujo  $\phi_t^{\bar{\Omega}}$  y  $S_{i,\theta}(\bar{\Omega}) = \eta_i$ . Como

$$d_{\theta_0}P(\bar{\Omega}, \Sigma_0, \Sigma_0) = \prod_{i=0}^{n(\theta_t)} S_{i,\theta}(\bar{\Omega}) = \prod_{i=0}^{n(\theta_t)} \eta_i,$$

la órbita  $\theta_t$  es no-hiperbólica para el flujo magnético asociado a  $\bar{\Omega}$ , lo que contradice la elección de la vecindad  $\mathcal{U}$ . □

## Apéndice A

# Flujos Lagrangianos

En este Apéndice vamos a recordar los principales resultados para sistemas lagrangianos autónomos convexos y superlineales en una variedad cerrada, tales como los conceptos introducidos por Mather en [29] y Mañé en [27]. Para el caso en que  $M$  es el toro bidimensional, vamos a combinar el Teorema C y los resultados de [29], [11] y [28], para extender el resultado de la Proposición I a perturbaciones en la topología  $C^\infty$  para los flujos magnéticos exactos en el toro bidimensional ( Prop. A.2.1).

### A.1. Lagrangianos Autónomos Convexos y Superlineales

Sea  $M$  una variedad suave cerrada y conexa de dimensión arbitraria. Sea  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  un lagrangiano de clase  $C^\infty$  convexo y superlineal, i.e., para cada fibra  $T_x M$ , la restricción de  $L$  tiene el Hessiano positivo definido y vale:

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|} = \infty,$$

uniforme en  $x \in M$ . Recordemos que la acción del lagrangiano  $L$  sobre una curva absolutamente continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  esta definida por:

$$A_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)).$$

Los puntos extremales de la acción están dados por las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange, que en coordenadas locales se escriben como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Siendo el Lagrangiano  $L$  convexo, las ecuaciones de Euler-Lagrange definen un campo vectorial completo en  $TM$  al cual denotaremos por  $X_L$ . Definimos el flujo de Euler-Lagrange  $\phi_t(L) : TM \rightarrow TM$  como el flujo asociado al campo  $X_L$ . La Energía Total  $E_L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como:

$$E_L(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v} \cdot v - L(x, v) \tag{A.1}$$

es una integral primera para el flujo  $\phi_t(L)$ .

Vamos ahora a recordar la definición de Mañé del valor crítico [27]. Dados dos puntos  $x, y \in M$  y  $T > 0$  denotemos por  $\mathcal{C}_T(x, y)$  el conjunto de todas las curvas absolutamente continuas  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ , tales que  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(T) = y$ . Para cada  $k \in \mathbb{R}$ , definimos el potencial de la acción  $\Phi_k : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\Phi_k(x, y) = \inf\{A_{L+k}(\gamma) ; \gamma \in \cup_{T>0} \mathcal{C}_T(x, y)\}$$

Siendo  $L$  convexo y superlineal podemos definir:

**Definición A.1.1.** El valor crítico del lagrangiano  $L$  es el número real  $c(L)$ , dado por:

$$c(L) := \inf\{k \in \mathbb{R} ; \Phi_k(x, x) > -\infty \text{ para algun } x \in M\}.$$

Sea  $p : N \rightarrow M$  un recubrimiento de  $M$  y  $\mathbb{L} : TN \rightarrow \mathbb{R}$  el levantamiento de lagrangiano  $L$  a  $N$ , i.e  $\mathbb{L} = L \circ dp$ . Entonces, para  $k \in \mathbb{R}$ , definiendo el potencial  $\Phi_k : N \times N \rightarrow \mathbb{R}$ , como arriba, obtenemos el valor crítico  $c(\mathbb{L})$  para  $\mathbb{L}$ . Por propiedades del infimo, tenemos que si  $N_1$  y  $N_2$  son recubrimientos de  $M$ , tal que  $N_1$  cubre  $N_2$ , entonces

$$c(\mathbb{L}_1) \leq c(\mathbb{L}_2), \quad (\text{A.2})$$

donde  $\mathbb{L}_1$  y  $\mathbb{L}_2$  denotan el levantamiento de  $L$  a  $N_1$  y  $N_2$  respectivamente. Entre todos los recubrimientos de  $M$  destacamos el recubrimiento abeliano al cual denotaremos por  $\tilde{M}$ . Definimos el valor crítico estricto  $c_0(L)$  como el valor crítico para el levantamiento  $\tilde{L} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $L$  a  $\tilde{M}$ .

Observemos que para cada curva absolutamente continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  y para todo  $k \geq c(L)$ , vale:

$$A_L(\gamma) \geq \Phi_k(\gamma(a), \gamma(b)) \geq -\Phi_k(\gamma(b), \gamma(a)). \quad (\text{A.3})$$

Decimos que una curva absolutamente continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  es *semiestática* si

$$A_L(\gamma|_{[t_0, t_1]}) = \Phi_{c(L)}(\gamma(t_0), \gamma(t_1)),$$

para todo  $a < t_0 \leq t_1 < b$ ; y decimos que es *estática* si

$$A_L(\gamma|_{[t_0, t_1]}) = -\Phi_{c(L)}(\gamma(t_1), \gamma(t_0)),$$

para todo  $a < t_0 \leq t_1 < b$ . Ciertamente, por A.3, una curva estática es semiestática. Alternativamente podemos decir que una curva semiestática  $\gamma|_{[a, b]}$  es estática cuando para todo  $a < t_0 \leq t_1 < b$ , vale  $d_{c(L)}(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = 0$ , donde  $d_k : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  definido como

$$d_k(x, y) = \Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, x)$$

es una función distancia para  $k > c(L)$  y una pseudo-distancia para  $k = c(L)$ . Por definición del potencial, una curva semiestática es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Además las curvas semiestáticas tienen energía igual a  $c(L)$  (cf. [27, 10]). Los conceptos de curvas semiestáticas y estáticas están cercanamente relacionados a los conceptos de trayectorias  $c$ -minimal y trayectorias  $c$ -minimal regular respectivamente, introducidos por Mather en [30].

Dado  $\theta \in TM$  vamos a denotar por  $\gamma_\theta : \mathbb{R} \rightarrow M$  la única solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange con la condición inicial  $(\gamma_\theta(0), \dot{\gamma}_\theta(0)) = \theta$ . Sean

$$\Sigma = \Sigma(L) = \{\theta \in TM ; \gamma_\theta : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ es semiestática}\},$$

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}(L) = \{\theta \in TM ; \gamma_\theta : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ es estática}\},$$

dichos conjuntos son subconjuntos de  $TM$  compactos e invariantes por el flujo de Euler Lagrange de  $L$ . Sea  $\pi : TM \rightarrow M$  la proyección canónica. Entonces  $\pi|_{\hat{\Sigma}} : \hat{\Sigma} \rightarrow M$  es biyectiva con inversa Lipschitz, la prueba de tal propiedad puede ser vista en [27, 10] y extiende el Teorema del Gráfico Lipschitz de Mather en [29].

Usando la propiedad del Gráfico, podemos definir una relación de equivalencia en  $\hat{\Sigma}$ . Vamos a decir que dos elementos  $\theta_1$  y  $\theta_2 \in \hat{\Sigma}$  son equivalentes cuando  $d_{c(L)}(\pi(\theta_1), \pi(\theta_2)) = 0$ . Tal relación de equivalencia particiona  $\hat{\Sigma}$  en clases, las cuales llamaremos *clases estáticas de  $L$* . Sea  $\Lambda$  el conjunto de las clases estáticas. Definimos un orden parcial  $\preceq$  en  $\Lambda$  por:

(i)  $\preceq$  es reflexiva.

(ii)  $\preceq$  es transitiva.

(iii) Si existe  $\theta \in \Sigma$ , tal que el conjunto  $\alpha$ -limite  $\alpha(\theta) = \alpha(\phi_t(L)(\theta)) \subset \Lambda_i$  y el conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(\theta) = \omega(\phi_t(L)(\theta)) \subset \Lambda_j$ , entonces  $\Lambda_i \preceq \Lambda_j$ .

El siguiente teorema fue probado por Contreras y Paternain en [11].

**Teorema A.1.2.** Supongamos que el número de las clases estáticas es finito. Entonces dado  $\Lambda_i$  y  $\Lambda_j$  en  $\Lambda$ , tenemos que  $\Lambda_i \preceq \Lambda_j$ .  $\square$

Sea  $\Lambda \subset TM$  un subconjunto invariante por el flujo  $\phi_t$ . Dados  $\epsilon > 0$  y  $T > 0$ , decimos que los puntos  $\theta_1, \theta_2 \in \Lambda$  están  $(\epsilon, T)$ -conectados por cadenas en  $\Lambda$ , si existe una sucesión finita  $\{(\xi_i, t_i)\}_{i=1}^n \subset \Lambda \times \mathbb{R}$ , tal que  $\xi_1 = \theta_1$ ,  $\xi_n = \theta_2$ ,  $T < t_i$  y  $d(\phi_{t_i}(\xi_1), \xi_{i+1}) < \epsilon$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ . Decimos que el subconjunto  $\Lambda \subset TM$  es *transitivo por cadena*, si para todo par  $\theta_1, \theta_2 \in \Lambda$  y para todo  $\epsilon > 0$  y  $T > 0$ , los puntos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  están  $(\epsilon, T)$ -conectados por cadena en  $\Lambda$ . Cuando esta condición también es válida si  $\theta_1 = \theta_2$ , decimos que  $\Lambda$  es *recurrente por cadena*. La prueba del siguiente teorema puede ser vista en [10].

**Teorema A.1.3.**

(a)  $\Sigma$  es transitivo por cadenas.

(b)  $\hat{\Sigma}$  es recurrente por cadenas.

(c) Los conjuntos  $\alpha$  y  $\omega$ -limites de una órbita semiestática están contenidos en  $\hat{\Sigma}$ .  $\square$

Vamos ahora a recordar los conceptos introducidos por Mather en [29] aplicados al caso autónomo, donde el lector podrá ver los detalles y las pruebas. Sea  $M$  el espacio de todas

las medidas de probabilidad con soporte compacto en el  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $TM$ , con la topología débil. Por los resultados básicos de la Teoría Ergódica, tenemos que  $M$  es un espacio métrico compacto y convexo. Denotemos por  $\mathcal{M}(L) \subset \mathcal{M}$  el subconjunto de todas las medidas de probabilidad invariantes por el flujo de Euler-Lagrange asociado al lagrangiano  $L$ . Definimos la funcional de la acción media  $\mathcal{A}_L : \mathcal{M}(L) \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$\mathcal{A}_L(\mu) = \int_{TM} L d\mu.$$

Sea  $H_1(M, \mathbb{R})$  el primer grupo de homología real de  $M$ . Para cada medida  $\mu \in \mathcal{M}(L)$  podemos asociar una única clase de homología, la cual denotaremos por  $\rho(\mu)$ , tal que

$$\langle \rho(\mu), [\omega] \rangle = \int_{TM} \omega d\mu,$$

para toda 1-forma  $\omega$  cerrada en  $M$ .

Para cada  $h \in H_1(M, \mathbb{R})$ , definimos

$$\mathcal{M}(h) = \mathcal{M}(L, h) = \{\mu \in \mathcal{M}(L) ; \rho(\mu) = h\}.$$

Usando que el subconjunto  $\mathcal{M}(h)$  es cerrado, la funcional es semicontinua inferiormente y usando que la aplicación  $\rho$  es sobreyectiva, podemos definir la función de la acción mínima  $\beta : H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$\beta(h) = \min\{\mathcal{A}_L(\mu) ; \rho(\mu) = h\}.$$

Esta función es convexa y superlineal. Una medida invariante  $\mu$  satisfaciendo  $\mathcal{A}_L(\mu) = \beta(\rho(\mu))$  es llamada medida  $\rho(\mu)$ -minimizante. Definimos la función  $\alpha$  de Mather como la función dual convexa de  $\beta$ , i.e  $\alpha = \beta^* : H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\alpha([\omega]) = \sup_{h \in H_1(M, \mathbb{R})} \{\langle [\omega], h \rangle - \beta(h)\} = - \min_{\mu \in \mathcal{M}(L)} \{\mathcal{A}_{L-\omega}(\mu)\}.$$

Por dualidad convexa, tenemos que  $\alpha$  también es una función convexa, superlineal y  $\alpha^* = \beta$ . Además, una medida  $\mu_0$  es  $\rho(\mu_0)$ -minimizante, si y sólo, existe una 1-forma cerrada  $\omega_0$ , tal que  $\mathcal{A}_{L-\omega_0}(\mu_0) = \min_{\mu \in \mathcal{M}(L)} \{\mathcal{A}_{L-\omega_0}(\mu)\}$ . La clase  $[\omega_0] \in H^1(M, \mathbb{R})$  es usualmente llamada subderivada de la función  $\beta$  en el punto  $\rho(\mu_0) \in H_1(M, \mathbb{R})$ . Para cada  $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$ , consideremos el subconjunto:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\omega(L) &= \{\mu \in \mathcal{M}(L) ; \alpha([\omega]) = -\mathcal{A}_{L-\omega}(\mu)\} \\ &= \{\mu \in \mathcal{M}(L) ; \mathcal{A}_L(\mu) = \beta(\rho(\mu)) = \langle \omega_0, \rho(\mu) \rangle - \alpha([\omega])\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

El conjunto de Mather  $\Lambda([\omega]) \subset TM$  está dado por:

$$\Lambda([\omega]) = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}^\omega(L)} \text{Supp}(\mu)}.$$

Tales conjuntos son compactos e invariantes, y como ya mencionado anteriormente, poseen la propiedad del gráfico lipschitz.

Vamos ahora recordar las relaciones entre la teoría de Mather y los valores críticos de un lagrangiano. Mañé en [27, 10], probó la notable igualdad:

$$c(L - \omega) = \alpha([\omega]),$$

para toda 1-forma cerrada  $\omega$  en  $M$ . En el caso del recubrimiento abeliano de  $M$ , en [32] G. Paternain y M. Paternain probaron que:

$$c_0(L) = \min_{[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})} \{c(L - \omega)\} = \min_{[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})} \{\alpha([\omega])\} = -\beta(0).$$

El siguiente teorema también fue probado por Mañé en [27].

**Teorema A.1.4.** Sean  $\mu \in \mathcal{M}(L)$  y  $\omega$  una 1-forma en  $M$ . Entonces  $\mu \in \mathcal{M}^\omega(L)$ , si y sólo si  $\text{Supp}(\mu) \subset \hat{\Sigma}(L - \omega)$ . □

Usando las propiedades de las funciones  $\alpha$  y  $\beta$ , vamos a probar el siguiente lema:

**Lema A.1.5.** Supongamos que  $H_1(M, \mathbb{R}) \neq 0$ . Dados  $c > c_0(L)$  y una clase no nula  $h_0 \in H_1(M, \mathbb{R})$ , existe una 1-forma cerrada  $\omega_0$  y  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , tales que  $[\omega_0] \in H^1(M, \mathbb{R})$  es una subderivada de la función  $\beta$  en el punto  $\lambda_0 h_0 \in H_1(M, \mathbb{R})$ , con  $\alpha([\omega_0]) = c$ .

**Dem.:** Siendo las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  superlineales, valen:

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} \frac{\beta(h)}{|h|} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\|[\omega]\| \rightarrow \infty} \frac{\alpha([\omega])}{\|[\omega]\|} = \infty.$$

En particular

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\beta(\lambda h_0)}{|\lambda h_0|} = \infty. \quad (\text{A.5})$$

Sea  $\partial\beta : H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})^* = H^1(M, \mathbb{R})$ , la función multivaluada que a cada punto  $h \in H_1(M, \mathbb{R})$  asocia todas las subderivadas de la función convexa  $\beta$  en el punto  $h$ . Ya que  $\beta$  es finita, entonces  $\partial\beta(h)$  es un cono convexo no vacío para toda  $h \in H_1(M, \mathbb{R})$ , y  $\partial\beta(h)$  es un único vector, si y solamente si  $\beta$  es diferenciable en  $h$  ( cf [35, Sección 23]). Definimos el subconjunto

$$S(h_0) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \partial\beta(\lambda h_0).$$

Por (A.5) tenemos que el subconjunto  $S(h_0) \subset H^1(M, \mathbb{R})$  es no-acotado, y siendo  $\beta$  continua, por las propiedades de la función multivaluada  $\partial\beta$  mencionadas arriba, tenemos que  $S(h_0)$  es un subconjunto conexo. Observemos que  $\omega \in \partial\beta(0)$ , entonces  $\alpha([\omega]) = c_0(L) = \min\{\alpha([\delta]) ; \delta \in H^1(M, \mathbb{R})\}$  y además, por la superlinealidad de la función  $\alpha$ , la restricción

$\alpha|_{S(h_0)}$  es no-acotada. Por lo tanto por el Teorema del Valor Intermedio, tenemos que para todo  $c \in [c_0(L), \infty)$  existe  $\omega_0 \in \partial\beta(\lambda_0 h_0) \subset S(h_0)$ , para algún  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $\alpha([\omega_0]) = c$ , lo que prueba el lema.  $\square$

Decimos que una clase  $h \in H_1(M, \mathbb{R})$  es *racional* si existe  $\lambda > 0$ , tal que  $\lambda h \in i_* H_1(M, \mathbb{Z})$ , donde  $i: H_1(M, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_1(M, \mathbb{R})$  denota la inclusión. La prueba de la siguiente proposición puede ser vista en [28].

**Proposición A.1.6.** *Sea  $M$  una superficie cerrada y orientable. Sea  $\mu \in \mathcal{M}(L)$  una medida  $\rho(\mu)$ -minimizante, tal que  $\rho(\mu)$  es racional. Entonces el soporte de  $\mu$  es la unión de órbitas cerradas de  $L$ .*  $\square$

## A.2. Lagrangianos magnéticos en el toro $T^2$

Sea  $g$  una métrica riemanniana en el  $T^2$ . Dada una 2-forma exacta  $d\eta$  en  $T^2$ , el flujo magnético asociado a  $d\eta$  está dado por las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano

$$L_\eta(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v) - \eta_x(v).$$

Por la igualdad (A.1), en este caso tenemos:

$$E_{L_\eta}(x, v) = E_c(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v).$$

**Proposición A.2.1.** *Dado  $c > c_0(L_\eta)$  existe una 2-forma exacta  $d\bar{\eta} \in \Omega^2(T^2)$  arbitrariamente  $C^r$ -cercana a  $d\eta$ , con  $1 \leq r \leq \infty$ , tal que  $h_{\text{top}}(d\bar{\eta}, c) > 0$ .*

**Dem.:** Por el Teorema C, existe un subconjunto  $C^r$ -residual

$$\mathcal{O}(c) \subset \{\Omega \in \Omega^2(T^2) ; [\Omega] = 0\},$$

tal que para toda  $\Omega \in \mathcal{O}(c)$  el flujo magnético exacto  $\phi_t^\Omega$  asociado a  $\Omega$  satisface la propiedad  $P_{K-S}$ , i.e., toda órbita periódica del flujo  $\phi_t^\Omega$  es no-degenerada y todo punto heteroclínico es transversal. Siendo que  $L \mapsto c(L)$  es continua en el conjunto de los Lagrangianos endosado con la topología uniforme en subconjuntos compactos de  $TT^2$  (cf. observación en [11, pg17]), podemos elegir una 2-forma exacta  $d\xi$  arbitrariamente  $C^r$ -cercana a  $d\eta$ , con  $1 \leq r \leq \infty$ , tal que  $d\xi \in \mathcal{O}(c)$  y  $c > c_0(L_\xi)$ .

Sea  $i: H_1(T^2, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$  la inclusión. Recordemos que  $H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$  y que  $H_1(T^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ . De este modo tenemos que  $\{(0, 1), (1, 0)\} \subset H_1(T^2, \mathbb{Z})$  es una base de  $H_1(T^2, \mathbb{R})$ . Además, es fácil ver que si  $\alpha_0, \alpha_1$  son dos curvas cerradas en  $T^2$ , con  $[\alpha_0] = (0, 1)$  y  $[\alpha_1] = (1, 0)$ , entonces  $\alpha_0 \cap \alpha_1 \neq \emptyset$ .

Aplicando el Lema A.1.5 para  $h_0 = (0, 1) \in H_1(T^2, \mathbb{Z})$ , obtenemos una 1-forma cerrada  $\omega_0$  en  $T^2$  y  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , tales que  $c = \alpha([\omega_0]) = c(L_\xi - \omega_0)$  y si  $\mu_0 \in \mathcal{M}(L)$  es una medida  $(\lambda_0 h_0)$ -minimizante entonces vale:

$$A_{L_\xi - \omega_0}(\mu_0) = \min_{\mu \in \mathcal{M}(L)} \{A_{L_\xi - \omega_0}(\mu)\}$$

y siendo  $\rho(\mu_0) = \lambda_0 h_0$  racional, por la Proposición A.1.6, tenemos que el soporte de  $\mu_0$  es la unión de órbitas periódicas de  $L_\xi$ .

Sea  $\Lambda([\omega_0]) \subset TM$  el conjunto de Mather asociado a la clase  $[\omega_0] \in H^1(T^2, \mathbb{R})$ . Entonces, por definición de  $\Lambda([\omega_0])$ , tenemos que  $\text{Supp}(\mu_0) \subset \Lambda([\omega_0])$ . Por el Teorema del Gráfico  $\pi|_{\Lambda([\omega_0])}: \Lambda([\omega_0]) \rightarrow T^2$  es inyectiva. Luego si  $\gamma_1, \gamma_2: \mathbb{R} \rightarrow T^2$  son dos  $d\xi$ -geodésica magnéticas cerradas distintas contenidas en  $\pi(\Lambda([\omega_0]))$ , entonces obligatoriamente  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son curvas cerradas simples y  $[\gamma_1] = [\gamma_2] \in H_1(T^2, \mathbb{Z})$ , pues en caso contrario las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tendrían intersección no trivial. Sea  $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  una órbita periódica contenida en el soporte de la medida  $\mu_0$  y denotemos por  $\mu_\gamma$  la medida de probabilidad soportada en  $\phi_t^{d\xi}(\theta)$ . Entonces por definición de la aplicación  $\rho$ , tenemos que

$$\rho(\mu_\gamma) = \frac{[\gamma]}{T},$$

donde  $T > 0$  denota el período de  $\gamma$ . Luego, como  $\rho(\mu_0) = \lambda_0 h_0$  y por linealidad de  $\rho$ , tenemos que  $[\gamma] = h_0$ .

Recordemos que si una medida  $\mu \in \mathcal{M}^{\omega_0}(L)$ , entonces todas las componentes ergódicas de  $\mu$  también están contenidas en  $\mathcal{M}^{\omega_0}(L)$  (cf. [26, pg. 78]). Como  $c = c(L_\xi - \omega_0) > c_0(L_\xi) = -\beta(0)$  y  $\mathcal{M}^{\omega_0}(L)$  es cerrado, existe  $k > 0$ , tal que

$$|\rho(\mu)| > k > 0, \quad \text{para toda } \mu \in \mathcal{M}^{\omega_0}(L). \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto, el período de una órbita periódica contenida en  $\text{Supp}(\mu_0)$  esta acotado, lo que implica que  $\text{Supp}(\mu_0)$  es un número finito de órbitas periódicas de  $L_\xi$  (pues  $d\xi \in \mathcal{O}(c)$ ).

Sea  $\mu \neq \mu_0$  una medida invariante contenida en  $\mathcal{M}^{\omega_0}$ . Vamos a mostrar que  $\rho(\mu) \in \langle h_0 \rangle \subset H_1(T^2, \mathbb{R})$ . Inicialmente observemos que, si  $\gamma \in \pi(\text{Supp}(\mu_0))$ , entonces, como  $[\gamma] = h_0 \neq 0$ , el conjunto  $C_\gamma = T^2 - \{\gamma\}$  define un cilindro abierto. Por la propiedad del gráfico del conjunto de Mather  $\Lambda([\omega_0])$ , tenemos que  $\text{Supp}(\mu) \cap \text{Supp}(\mu_0) = \emptyset$ . Luego  $\pi(\text{Supp}(\mu)) \subset C_\gamma$ . Por lo tanto  $\rho(\mu) \in i_*(H_1(C_\gamma, \mathbb{R})) \subset H_1(T^2, \mathbb{R})$ , donde  $i: C_\gamma \hookrightarrow T^2$  es la inclusión. Por definición de  $C_\gamma$  tenemos que  $\rho(\mu) \in \langle h_0 \rangle \subset H_1(T^2, \mathbb{R})$ . Por lo tanto vale:

$$\mathcal{M}^{\omega_0}(L) \subset \{\mu \in \mathcal{M}(L) ; \rho(\mu) \in \langle h_0 \rangle\}.$$

Usando nuevamente la Proposición A.1.6 y la desigualdad (A.6), obtenemos que el conjunto  $\Lambda([\omega_0])$  es una unión finita de órbitas periódicas del lagrangiano  $L_\xi$ . En caso de que exista una órbita periódica no-hiperbólica en  $\Lambda([\omega_0])$ , entonces el Teorema se reduce al Teorema E. Por lo tanto vamos a asumir que todas las órbitas periódicas en  $\Lambda([\omega_0])$  son hiperbólicas.

Sean  $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow T^2$ , con  $i = 1, \dots, n$ , geodésicas magnéticas cerradas, tales que

$$\pi(\Lambda([\omega_0])) = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i.$$

Siendo que  $\text{Supp}(\mu_0) \subset \Lambda([\omega_0])$ , tenemos que  $[\gamma_i] = h_0 = (0, 1) \in H_1(T^2, \mathbb{R})$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dado  $\theta \in TM$  vamos a denotar por  $\gamma_\theta: \mathbb{R} \rightarrow M$  la única solución de las

ecuaciones de Euler-Lagrange de  $L_\xi$ , con la condición inicial  $(\gamma_\theta(0), \dot{\gamma}_\theta(0)) = \theta$ . Sea

$$\widehat{\Sigma}(\omega_0) = \widehat{\Sigma}(L_\xi - \omega_0) = \{\theta \in TM; \gamma_\theta: \mathbb{R} \rightarrow M \text{ es estática para } (L_\xi - \omega_0)\},$$

y sea  $\Lambda$  el conjunto de las clases estáticas para el lagrangiano  $L_\xi - \omega$ . Recordemos que  $\Lambda([\omega_0]) \subset \widehat{\Sigma}(\omega_0)$ , y siendo cada clase estática un conjunto conexo (Proposición 3.4 en [11]), para cada  $1 \leq i \leq n$ , la órbita  $(\gamma_i(t), \dot{\gamma}_i(t))$  está contenida en una clase estática. Por otro lado, el Teorema A.1.4 implica que cada clase estática contiene por lo menos una de las órbitas periódicas que forma el conjunto de Mather  $\Lambda([\omega_0])$ . Luego el número de las clases estáticas está acotado por  $n$ .

Inicialmente supongamos que  $\Lambda([\omega_0]) = \widehat{\Sigma}(\omega_0)$ . Entonces cada órbita periódica en  $\Lambda([\omega_0])$  es una clase estática. Sean  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  las clases estáticas para el lagrangiano  $L_\xi - \omega_0$ . Aplicando el Teorema A.1.2, obtenemos que  $\Lambda_i \preceq \Lambda_j$ , para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . En particular  $\Lambda_1 \preceq \Lambda_1$ , por lo tanto por definición de " $\preceq$ " tenemos que existe un punto  $\theta \in \Sigma(\omega_0)$  tal que el conjunto  $\alpha$ -límite  $\alpha(\theta) \subset \Lambda_1$  y el conjunto  $\omega$ -límite  $\omega(\theta) \subset \Lambda_1$ . Siendo  $(\gamma_1(t), \dot{\gamma}_1(t)) = \Lambda_1$  una órbita hiperbólica del flujo  $\phi_t^{d\xi}|_{T^*M}$  y que  $d\xi \in \mathcal{O}(c)$ , tenemos que  $\Lambda_1$  posee una órbita homoclínica transversal  $\phi_t^{d\xi}(\theta)$ . Por lo tanto  $h_{top}(d\xi, c) > 0$ , lo que prueba el Teorema para este caso.

Supongamos que  $\Lambda([\omega_0]) \neq \widehat{\Sigma}(\omega_0)$ . Para cada  $\theta \in \widehat{\Sigma}(\omega_0) \setminus \Lambda([\omega_0])$ , por la propiedad del gráfico para el conjunto estático  $\widehat{\Sigma}(\omega_0)$ , la geodésica magnética  $\gamma_\theta = \pi \circ \phi_t^{d\xi}(\theta): \mathbb{R} \rightarrow T^2$  no posee punto de autointersección y  $\gamma_\theta \cap \pi(\Lambda([\omega_0])) = \emptyset$ . Además, por el Teorema A.1.4, tenemos que los conjuntos  $\alpha$ -límite y  $\omega$ -límites están contenidos en el conjunto de Mather  $\Lambda([\omega_0])$ . Observemos que en el toro  $T^2$  una curva que se acumula en tiempo positivo a más de una curva cerrada necesariamente se autointersecta, tenemos que  $\omega(\theta)$  es apenas una órbita periódica. Del mismo modo, tenemos que  $\alpha(\theta)$  también es apenas una órbita periódica. Luego, como  $d\xi \in \mathcal{O}(c)$ , la órbita  $\phi_t^{d\xi}(\theta)$  es una órbita heteroclínica transversal. Evidentemente, si  $\Lambda([\omega_0])$  es una única órbita periódica, entonces  $\phi_t^{d\xi}(\theta)$  es una órbita homoclínica transversal, lo que implica que  $h_{top}(d\xi, c) > 0$ . En Caso contrario, i.e.  $n > 1$ , por la propiedad de recurrencia (Teorema A.1.3), tenemos que si  $\theta \in \widehat{\Sigma}(\omega_0) \setminus \Lambda([\omega_0])$ , entonces  $\theta$  está  $(\epsilon, T)$ -conectados por cadenas en  $\widehat{\Sigma}(\omega_0)$ , para todo  $\epsilon > 0$  y  $T > 0$ , i.e. existe una sucesión finita  $\{(\zeta_i, t_i)\}_{i=1}^k \subset \widehat{\Sigma}(\omega_0) \times \mathbb{R}$ , tal que  $\zeta_1 = \zeta_k = \theta$ ,  $T < t_i$  y  $d(\phi_{t_i}^{d\xi}(\zeta_i), \zeta_{i+1}) < \epsilon$ , para  $i = 1, \dots, k-1$ . Siendo que las geodésicas magnéticas cerradas en  $\pi(\Lambda([\omega_0]))$  son aisladas en el toro, tenemos que para  $\epsilon$  suficientemente chico, el conjunto  $\{\pi(\zeta_i)\}_{i=1}^k \subset \pi(\widehat{\Sigma}(\omega_0))$  necesariamente intersecta el interior de cada uno de los cilindros obtenidos por cortes del toro en dos curvas  $\gamma_i, \gamma_j \in \pi(\Lambda([\omega_0]))$ , con  $1 \leq i, j \leq n$ . Por lo tanto, eligiendo una orientación en  $\pi(\Lambda([\omega_0]))$  y reordenando los índices, obtenemos un ciclo de órbita heteroclínicas transversales, lo que prueba que  $h_{top}(d\xi, c)$ .

□

## Bibliografía

- [1] R. Abraham, *Bumpy metrics*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 1-3.
- [2] Ralph Abraham, *Transversality in manifolds of mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 470-474.
- [3] Ralph Abraham and Joel Robbin, *Transversal mappings and flows*, An appendix by Al Kelley, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
- [4] D. V. Anosov, *Generic properties of closed geodesics*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 4, 675-709, 896.
- [5] Rufus Bowen, *Periodic orbits for hyperbolic flows*, Amer. J. Math. **94** (1972), 1-30.
- [6] Keith Burns and Gabriel P. Paternain, *Anosov magnetic flows, critical values and topological entropy*, Nonlinearity **15** (2002), no. 2, 281-314.
- [7] A. Candel and R. Quiroga-Barranco, *Gromov's centralizer theorem*, Geom. Dedicata **100** (2003), 123-155.
- [8] G. Contreras, R. Iturriaga, G. P. Paternain, and M. Paternain, *Lagrangian graphs, minimizing measures and Mañé's critical values*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), no. 5, 788-809.
- [9] Gonzalo Contreras, *Partially hyperbolic geodesic flows are Anosov*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no. 7, 585-590.
- [10] Gonzalo Contreras, Jorge Delgado, and Renato Iturriaga, *Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits. II*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **28** (1997), no. 2, 155-196.
- [11] Gonzalo Contreras and Gabriel P. Paternain, *Connecting orbits between static classes for generic Lagrangian systems*, Topology **41** (2002), no. 4, 645-666. MR 2003i:37059
- [12] Gonzalo Contreras-Barandiarán and Gabriel P. Paternain, *Genericity of geodesic flows with positive topological entropy on  $S^2$* , J. Differential Geom. **61** (2002), no. 1, 1-49.

- [13] Manfredo Perdigão do Carmo, *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides [Euclid Project], vol. 10, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [14] John Franks, *Necessary conditions for stability of diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 301–308.
- [15] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [16] Philip Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.
- [17] A. Katok, *Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1980), no. 51, 137–173.
- [18] A. B. Katok, *Ergodic perturbations of degenerate integrable Hamiltonian systems*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **37** (1973), 539–576.
- [19] Anatole Katok and Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [20] Wilhelm Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Springer-Verlag, Berlin, 1978, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 230.
- [21] Wilhelm Klingenberg and Floris Takens, *Generic properties of geodesic flows*, Math. Ann. **197** (1972), 323–334.
- [22] Ivan Kolář, Peter W. Michor, and Jan Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [23] Patrice Le Calvez, *Dynamical properties of diffeomorphisms of the annulus and of the torus*, SMF/AMS Texts and Monographs, vol. 4, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, Translated from the 1991 French original by Philippe Mazaud.
- [24] M. Shub M. Hirsch, C. Pugh, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., vol. 583, Springer, 1977.
- [25] Ricardo Mañé, *An ergodic closing lemma*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 3, 503–540.
- [26] ———, *Global variational methods in conservative dynamics*, 18<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática. [18nd Brazilian Mathematics Colloquium], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1991.
- [27] ———, *Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits*, International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 362, Longman, Harlow, 1996, pp. 120–131.

- [28] D. Massart, *Stable norms of surfaces: local structure of the unit ball of rational directions*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 6, 996–1010.
- [29] J. Mather, *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*, Math. Z. **207** (1991), no. 2, 169–207.
- [30] ———, *Variational construction of connecting orbits*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 1349–1386.
- [31] Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, Oxford Science Publications.
- [32] Gabriel P. Paternain and Miguel Paternain, *Critical values of autonomous Lagrangian systems*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), no. 3, 481–499. MR 98i:58098
- [33] M. M. Peixoto, *On an approximation theorem of Kupka and Smale*, J. Differential Equations **3** (1967), 214–227.
- [34] Hans-Bert Rademacher, *On the average indices of closed geodesics*, J. Differential Geom. **29** (1989), no. 1, 65–83.
- [35] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [36] C. L. Siegel and J. K. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Translated from the German by C. I. Kalme, Reprint of the 1971 translation.
- [37] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.
- [38] Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*, second ed., Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., 1979.
- [39] G. Thorbergsson, *Non-hyperbolic closed geodesics*, Math. Scand **44** (1979), 135–148.
- [40] Wolfgang Ziller, *Geometry of the Katok examples*, Ergodic Theory Dynam. Systems **3** (1983), no. 1, 135–157.